Exercice 1 : Cours

Partie A : Fonctions de référence Voir le cours.

Partie B : Reconnaître la courbe d'une fonction

1. f est une fonction homographique, g est une fonction polynôme du second degré et h est une fonction affine.
2. f est délimitée par les droites d'équations $y = 1$ et $x = -1$ donc est la forme $f(x) = 1 + \lambda\dfrac{1}{x+1}$. De plus $f(0) = 0$ donc $1 + \lambda = 0$ donc $\lambda = -1$. On a donc $f(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x}$.
   g a comme maximum $(2;3)$ et $g(3) = 1$ donc le coefficient dominant est -2 donc $g(x) = -2(x-2)^2+3$.
   $\mathscr{C}_h$ passe par les points de coordonnées $(8;5)$ et $(-2;-1)$ donc le coefficient directeur de la droite est $\dfrac{5+1}{10} = \frac{3}{5}$. On a donc $h(x) = \frac{3}{5}x + b$. $h(-2) = -1$ donc $b = \frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5}$. Donc $h(x) = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$

Exercice 2 : Équations et inéquations

Résoudre :

1. $S = \{0;1\}$
2. $S = \{-\frac{5}{3}\}$
3. $S = \{\}$
4. $S =]-\frac{3}{2};2[$
5. $S = [-\frac{5}{3};\frac{3}{2}]$
6. $S =]-\frac{1}{3};5[$

Exercice 3 : Étude d'une fonction homographique

Soit $f(x) = -2 + \dfrac{3}{-2x-5}$

1. $-2x - 5 = 0$ si $x = -\frac{5}{2}$ donc la fonction est définie sur $]-\infty;-\frac{5}{2}[\cup]-\frac{5}{2};+\infty[$
2. $f(x) = \dfrac{-2(-2x-5)+3}{-2x-5} = \dfrac{4x+13}{-2x-5}$ donc f est une fonction homographique
3. $f(0) = -2 - \frac{3}{5} = -\frac{13}{5}$ et $f(\frac{1}{2}) = -\frac{5}{2}$
4. $f(x) = -2$ est équivalent à $\dfrac{3}{-2x-5} = 0$. Il n'y a donc pas de solution et f n'a donc pas d'antécédent.
5. a. On a $f(x) = -2 - \frac{3}{2}\dfrac{1}{x+\frac{5}{2}}$, on a donc

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	$+\infty$
f	↗	‖	↗

   b. Soient a et b tels que $a < b < -\frac{5}{2}$. On a $a < b < -\frac{5}{2} \Leftrightarrow a + \frac{5}{2} < b + \frac{5}{2} < 0$. Comme la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty;0[$, cette inégalité donne
   $\dfrac{1}{a+\frac{5}{2}} > \dfrac{1}{b+\frac{5}{2}} \Leftrightarrow -\frac{3}{2}\dfrac{1}{a+\frac{5}{2}} < -\frac{3}{2}\dfrac{1}{b+\frac{5}{2}} \Leftrightarrow -2 - \frac{3}{2}\dfrac{1}{a+\frac{5}{2}} < -2 - \frac{3}{2}\dfrac{1}{a+\frac{5}{2}}$. Donc f est bien croissante sur $]-\infty;-5]$
6. On doit tracer les droites d'équations $x = -\frac{5}{2}$ et $y = -2$.
7. a. Le centre de symétrie est le point de coordonnées $(-\frac{5}{2};-2)$
   b. Soit $M(x;y)$ un point de l'hyperbole. On a donc $y = f(x)$.
   Son symétrique est $M'(-x-5;-y-4)$ (Il faut que le milieu de $[MM']$ soit le centre de symétrie).
   $f(-x-5) = -2 + \dfrac{3}{-2(-x-5)-5} = -2 + \dfrac{3}{2x+5} = -2 - \dfrac{3}{-2x-5}$.
   $-f(x) - 4 = 2 - \dfrac{3}{-2x-5} - 4 = -2 - \dfrac{3}{-2x-5} = f(-x-5)$.
   Donc M' appartient aussi à l'hyperbole.

Exercice 4 : Problème : Géométrie analytique

1. En plaçant les points, on conjecture que M_1, M_2 et M_3 sont alignés.

2. a. A est le milieu de $[DB]$ les coordonnées $(x_D; y_D)$ de D vérifies donc $2 = \frac{5+x_D}{2}$ et $1 = \frac{-1+y_D}{2}$ donc $x_D = -1$ et $y_D = 3$. On montre de la même façon que $(3; 2)$ sont les coordonnées de E.
Soit $M(x; y)$ un point de (DE). On a $\overrightarrow{DM}\binom{x+1}{y-3}$ et $\overrightarrow{DE}\binom{4}{-1}$. $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires, ce qui est équivalent à $-(x+1) - 4(y-3) = 0$ donc $y = -\frac{x}{4} + \frac{11}{4} = 0$ est une équation de (DE).

b. $-4 \times 5 + 19 = -1$ et $-4 \times 4 + 19 = 3$ donc la droite d'équation $y = -4x + 19 = 0$ passe par B et C. Ce qui prouve que c'est une équation de (BC).

c.

$$\begin{cases} y &= -\frac{x}{4} + \frac{11}{4} \\ y &= -4x + 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16y &= -4x + 44 \\ y &= -4x + 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15y &= 25 \\ y &= -4x + 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} &= -4x + 19 \times 53 + 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= \frac{5}{3} \\ x &= \frac{13}{3} \end{cases}.$$

Le point d'intersection est donc $F\left(\frac{13}{3}; \frac{5}{3}\right)$

d. $M_1\left(\dfrac{4-1}{2}; \dfrac{3+3}{2}\right)$ donc $M_1\left(\frac{3}{2}; 3\right)$. $M_2\left(4; \frac{1}{2}\right)$.

e. $\overrightarrow{M_1M_2}\binom{\frac{5}{2}}{-\frac{5}{2}}$ et $\overrightarrow{M_1M_3}\binom{\frac{5}{3}}{-\frac{5}{3}}$.
$-\frac{5}{2} \times \frac{5}{3} + \frac{5}{3} \times \frac{5}{2} = 0$ donc $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{M_1M_3}$ sont colinéaires et donc M_1, M_2 et M_3 sont alignés.

Exercice 5 : Problème : Fonctions

1. a. Pour tracer cette droite, on choisit les points $A(1; 3)$ et $B(4; 8)$.
   b. L'entreprise réalisera un bénéfice à partir de 10 voitures vendues.
2. $B(x) = R(x) - C(x) = -\frac{1}{6}x^{+}\frac{5}{6}x - \frac{2}{3}$.
$-\frac{1}{6}(x - \frac{5}{2})^2 + \frac{3}{8} = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{25}{24} + \frac{3}{8} = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{2}{3} = B(x)$

3. a. Le tableau de variations de B est :

x	0	$\frac{5}{2}$	5
B	$-\frac{2}{3}$ ↗	$\frac{3}{8}$ ↘	$-\frac{2}{3}$

   b. Le bénéfice est maximal pour 25 voitures achetées.
4. a. $B(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{6}(x - \frac{5}{2})^2 + \frac{3}{8} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{6}\left((x - \frac{5}{2})^2 - \frac{9}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{6}(x - \frac{5}{2} - \frac{3}{2})(x - \frac{5}{2} + \frac{3}{2}) = 0$
Il y a donc deux solutions 4 et 1.
   b. L'entreprise doit fabriquer entre 10 et 40 véhicules

Exercice 6 : Question ouverte

On remarque que les points sont alignés.
On peut écrire les vecteurs $\overrightarrow{A'D}$ et $\overrightarrow{ED}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$ $\overrightarrow{EB}$.
$\overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'D}$
Les vecteurs sont colinéaires donc les points sont alignés.