Exercice 1 :

Partie A

(1) a. $f(1) = 5$ et $f'(-\frac{1}{2}) = 0$.

b. Le coefficient directeur de $\mathscr{D}$ est 3.

(2) $f'(x) = a\mathrm{e}^{x-1} + (ax+b)\mathrm{e}^{x-1} = (ax+a+b)\mathrm{e}^{x-1}$

(3) a. On a $f(1) = (a \times 1 + b)\mathrm{e}^0 + c = a+b+c$ et on a vu que $f(1) = 5$ donc $a+b+c = 5$

On a $f'(1) = (a \times 1 + b + a)\mathrm{e}^0 = 2a+b$ et on a vu que le coefficient directeur de $\mathscr{D}$ est 3 donc $f'(1) = 3$. Donc $2a+b = 3$

On a $f'(-\frac{1}{2}) = (-a \times \frac{1}{2} + b + a)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ et on a vu que $f'(-\frac{1}{2}) = 0$. Donc $(\frac{1}{2}a + b)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = 0$. Comme $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \neq 0$, on a $\frac{a}{2} + b = 0$ donc $a + 2b = 0$

b. $\begin{cases} a+2b &= 0 \\ 2a+b &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= -2b \\ 2 \times (-2b) + b &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= -2b = 2 \\ b &= -1 \end{cases}$

c. On a donc $c = 5 - a - b = 4$

Partie B

(1) En utilisant la partie A, on a $f'(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{x-1}$. $2x+3$ est positif quand $x > -\frac{1}{2}$, donc la fonction f est strictement croissante sur $[-\frac{1}{2}; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty; -\frac{1}{2}]$.

(2) f est continue sur $[1;2]$, strictement croissante sur $[1;2]$ et $f(1) = 1+4 = 5$ et $f(2) = 5\mathrm{e}^1 \approx 13,6$. Selon le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires $f(x) = 6$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1;2]$.

Avec la calculatrice, on trouve $1,2 < \alpha < 1,3$.