Attention aux soins et à la propreté.

Partie 1 :

Soit g la fonction définie sur $[1;1000]$ par :

$$g(x) = x^3 - 1200x - 100.$$

(1) Calculer $g'(x)$.

(2) Étudier les variations de g et dresser son tableau de variations.

(3) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[20;40]$.

(4) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α arrondie à l'unité.

(5) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[1;1000]$.

Partie 2 :

Soit f la fonction définie sur $[1;1000]$ par :

$$f(x) = x + 50 + \frac{1200x + 50}{x^2}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal d'unités graphique 1 cm pour 5 unités en abscisse, et 1 cm pour 20 unités en ordonnées.

(1) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.

(2) Étudier le signe de $f'(x)$ en utilisant les résultats de la question 5 de la partie 1.

(3) Dresser le tableau de variations de f sur $[1;100]$.

(4) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

(5) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 130$ (on donnera des valeurs des solutions arrondies à l'unité).

Partie 3 :

Une entreprise fabrique des tee-shirts ; le coût total de fabrication de x centaines de tee-shirts est donné, pour x appartenant à $[1;1000]$ par :

$$C(x) = x^2 + 50x + 1200 + \frac{50}{x},.$$

où $C(x)$ est exprimé en euros.

Le coût moyen de fabrication d'une centaine de tee-shirts, lorsque x centaines sont fabriquées, est défini par $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

(1) Déterminer la quantité de tee-shirts arrondie à l'unité à fabriquer pour que le coût moyen soit minimal.

(2) Préciser ce coût minimum pour une centaine de tee-shirts.

(3) Déterminer la quantité de tee-shirts arrondie à l'unité à fabriquer pour que le coût moyen soit de 130 euros.