Tes 1 DM 1 correction 19 septembre 2014

Partie 1 :

(1) $g'(x) = 3x^2 - 1200$.

(2) $g'(x) = 0$ si et seulement si $x = \sqrt{400} = 20$ sur $[1; 1000]$ (l'autre solution -20 n'est pas dans l'intervalle). Le coefficient dominant 3 est positif, donc :

x	1		20		1000
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	-1299	$\searrow$	-16100	$\nearrow$	$g(1000)$

(3) — La fonction g est continue sur $[20; 40]$ comme fonction polynôme.
— La fonction g est strictement croissante sur $[20; 40]$
— $g(20) = -16100$ et $g(40) = 15900$
Selon le corolaire du théorème des valeurs intermédiaires, $g(x) = 0$ admet donc une unique solution sur l'intervalle $[20; 40]$.

(4) Avec la calculatrice, on remarque que $f(34) = -1596 < 0$ et $f(35) = 775 > 0$, donc $\alpha \approx 35$ à l'unité près.

(5) Sur $[1; 20]$, la fonction est décroissant et $g(1) < 0$, $g(x) < 0$ sur cet intervalle.
Sur $[20; 1000]$, la fonction g est strictement croissante et $g(\alpha) = 0$.
Donc $g(x) < 0$ sur $[1; \alpha]$ et $g(x) > 0$ sur $[\alpha; 1000]$.

Partie 2 :

(1) On pose $u(x) = 1200x + 50$ et $v(x) = x^2$. on a donc $u'(x) = 1200$ et $v'(x) = 2x$. Ainsi :

$$f'(x) = 1 + \frac{1200x^2 - 2x(1200x + 50)}{x^4} = \frac{x^4 - 1200x^2 - 100x}{x^4} = \frac{x^3 - 1200x - 100}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}.$$

(2) $x^3 > 0$ sur $[1; 1000]$ donc $f(x)$ est du signe de $g(x)$ sur cet intervalle.

x	1		α		1000
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1301	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$\frac{21024001}{20000}$

(3)

(4) Attention de respecter l'échelle pour tracer cette courbe.

(5) Pour résoudre graphiquement, on trace la droite d'équation $y = 130$. On obtient $S = \{60\}$.

Partie 3 :

(1) On calcule d'abord $C_M(x) = \frac{C(x)}{x} = x + 50 + \dfrac{1200x + 50}{x^2} = f(x)$. En utilisant la partie précédente, on conclut que pour que le coût moyen soit minimal, il faut produire 3500 tee-shirts.

(2) Pour une centaine de tee-shirts, ce coût est de 119 euros.

(3) En utilisant la partie précédent, on conclut qu'il faut fabriquer environ 6000 tee-shirts pour avoir un coût moyen de 130 euros.