Exercice 1 :

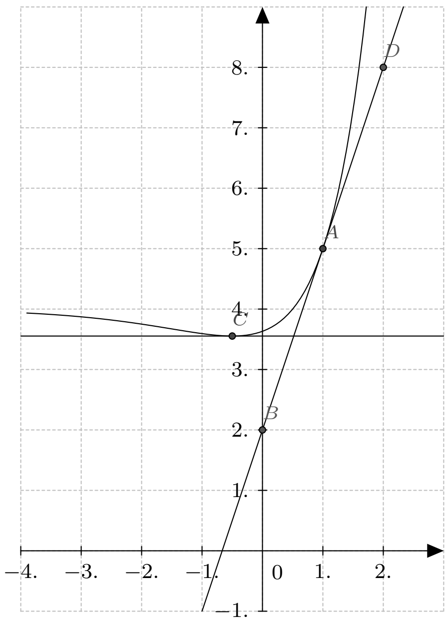
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{x-1} + c,$$

où a, b et c sont trois réels que l'on propose de déterminer.

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de f dans un repère orthogonal est tracée ci-dessous. Elle passe par le point $A(1;5)$ et la droite $\mathscr{D}$ est sa tangente en ce point.

Les points $B(0;2)$ et $D(2;8)$ appartiennent à la droite $\mathscr{D}$. La courbe $\mathscr{C}$ admet également une tangente horizontale au point C d'abscisse $-\frac{1}{2}$.



Partie A

(1) a. Préciser les valeurs de $f(1)$ et de $f'(-\frac{1}{2})$.

b. Déterminer le coefficient directeur de la droite $\mathscr{D}$.

(2) Déterminer $f'(x)$ pour tout x réel.

(3) a. Montrer que a, b, c vérifient le système : $\begin{cases} a+b+c & = 5 \\ a+2b & = 0 \\ 2a+b & = 3. \end{cases}$

b. Déterminer a et b en résolvant le système formé par les deux dernières équations.

c. En déduire le réel c, puis l'expression de la fonction f.

Partie B

On admet dans la suite de l'exercice que pour tout réel x :

$$f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{x-1} + 4.$$

(1) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que l'équation $f(x) = 6$ admet une unique solution réelle α sur l'intervalle $[1;2]$ et donner un encadrement de α d'amplitude $0,1$.