TES 1 — DM 4 Correction — 24 janvier 2015

Exercice 1 : (10 points)

Partie A

(1) g est dérivable sur $[1;10]$ car la fonction ln est dérivable sur cet intervalle. On a $g'(x) = \frac{2}{x}$, $x \geqslant 1$, donc $g'(x) > 0$. On en déduit que la fonction est croissante sur $[1;10]$.

(2)

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}.$$

(3) En utilisant les mêmes arguments, on montre que :

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow 2\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \sqrt{\mathrm{e}}.$$

Partie B

(1) a. f est dérivable comme produit et somme de fonctions dérivables sur $[1;10]$. On pose :

$$u(x) = 2x^2, \quad v(x) = \ln x - 1, \text{ donc } u'(x) = 4x, \quad v'(x) = \frac{1}{x}.$$

Donc :

$$f' = 4x(\ln x - 1) + 2x^2 \times \frac{1}{x} = 2x(2\ln x - 2 + 1) = 2xg(x).$$

b. sur $[1;10]$, $x > 1$ et $g(x) > 0$ ssi $x > \sqrt{e}$, on a donc :

x	1		$\sqrt{e}$		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\mathrm{e}+2$	$\nearrow$	$200\ln(10) - 198$

(2) a. Sur $]1;\sqrt{\mathrm{e}}]$, la fonction est strictement décroissante, continue et $f(1) = 0$. Sur cet intervalle la fonction est donc strictement négative.
Sur $[\sqrt{\mathrm{e}};10]$, la fonction est continue, strictement croissante et $f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = -\mathrm{e} + 2 \approx -0{,}71 < 0$ et $f\left(10\right) = 200\ln(10) - 198 \approx 261{,}6 > 0$.
Selon un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution sur $]1;10]$.

b. Avec la calculatrice, on remarque que $2{,}21 < \alpha < 2{,}22$.