BACCALAURÉAT BLANC

Session Février 2015

Lycée Alexandre Dumas, Saint-Cloud

Mathématiques - Série ES - Option L

Pour les élèves suivant le cours de spécialité, l'exercice 2 de ce sujet est remplacé par l'exercice sur la feuille distribuée à part.

Sujet

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage d'une calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Chaque candidat devra indiquer le numéro de sa classe et le nom de son enseignant sur la copie.

Le sujet ne sera pas rendu.

Exercice 1 : ....(4 points)

Pour chacune des propositions, déterminer si la proposition est vraie ou fausse et justifier la réponse.

Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Par contre, toute démonstration même partielle sera évaluée positivement.

(1) Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\dfrac{\ln(x)}{x}$. Alors sa dérivée vaut $f'(x) = \frac{1}{x}$.

(2) Une solution de l'équation $3\mathrm{e}^x - 2 = 0$ est $\ln(2) - \ln(3)$.

(3) L'équation $3\ln(x) + 1 = -6$ n'a pas de solution.

(4) L'ensemble des solutions de $3 - \ln(x) > 0$ est $S =]\mathrm{e}^3;+\infty[$.

(5) Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + 3x - 1$ est concave sur $]0;+\infty[$.

(6) Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison $q = 0{,}9$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = 100 \times \left(1 - 0{,}9^{n+1}\right).$$

Exercice 2 : ....(5 points)

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

Une observation faite sur la fréquentation d'un stade de football a permis de constater, pour chaque année, un taux de réabonnement de 80%, ainsi que l'apparition de 4 000 nouveaux abonnés.

L'objet de cet exercice est l'étude du devenir du nombre annuel des abonnés, en supposant que la situation décrite par l'observation reste la même au fil des ans.

On note a_n le nombre des abonnés en milliers à la fin de la nième année et on précise que $a_0 = 7$.

(1) Calculer le nombre d'abonnés à la fin de la première année.

(2) Montrer que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}8a_n + 4$.

(3) Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = a_n - 20$.

   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,8. Préciser son premier terme.

   b. Exprimer u_n en fonction de n.

   c. En déduire que pour tout entier naturel n, $a_n = 20 - 13 \times 0{,}8^n$.

   d. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter ce résultat.

(4) a. Résoudre l'inéquation $20 - 13 \times 0{,}8^n > 15$.

   b. En quelle année le nombre d'abonné dépassera-t'il 15000

(5) On donne l'algorithme suivant :

Variables	A est un réel N est un entier

Traitement	Affecter à N la valeur 0.
	Affecter à A la valeur 7
	
	Tant que $A \leqslant 15$
	    N prend la valeur $N+1$
	    A prend la valeur $A \times 0{,}8 + 4$
	Fin tant que

Sortie	Afficher le nombre N

a. Recopier et compléter autant que nécessaire le tableau suivant. Les résultats seront arrondis au dixième.

Valeur de n	0	1	....	
Valeur de A	7		....	
Condition $A \leqslant 15$	vrai		....	

b. En déduire l'affichage obtenu.

c. Dans le contexte de cet exercice, expliquer comment interpréter le nombre obtenu en sortie de cet algorithme.

Exercice 3 : ....(5 points)

Une entreprise fabrique des articles en grande quantité.

Une étude statistique a permis de constater que 9% des articles fabriqués sont défectueux.

L'entreprise décide alors de mettre en place un test de contrôle de qualité de ces articles.

Parmi les articles défectueux, 92% sont éliminés par le contrôle.

Parmi les articles non défectueux 2% sont éliminés par le contrôle.

Les articles non éliminés sont alors mis en vente.

Partie A :

On prend au hasard un article fabriqué et on considère les événements suivants.

D : « l'article est défectueux ».

V : « L'article est déclaré bon pour la vente après le contrôle. »

(1) Construire un arbre pondéré en rendant compte de cette situation.

(2) Calculer la probabilité qu'un article fabriqué ait un défaut et soit mis en vente.

(3) Montrer que $P(V) = 0{,}899$

(4) Un article est déclaré bon pour la vente après le contrôle. Quelle est la probabilité qu'il soit défectueux ? *On arrondira le résultat à* 10^{-3} *près*

Partie B :

On admet dans cette partie que 0,8% des articles vendus sont défectueux.

Pour satisfaire la commande d'un client, on prélève au hasard 50 articles dans le stock. Le stock est suffisamment important pour que le prélèvement des articles soit assimilé à des tirages indépendants avec remise.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 50 articles dans ce stock associe le nombre d'articles défectueux.

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

(1) Justifier que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}008$.

(2) Déterminer la probabilité de trouver deux articles qui ont un défaut.

(3) Déterminer la probabilité qu'au moins deux articles ont un défaut.

Exercice 4 : .... (6 points)

Partie A : Étude graphique

On a représenté ci-contre, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction définie et dérivable sur $[0;15]$. On a tracé les tangentes T_1, T_2, T_3 à $\mathscr{C}$ aux points $A(2;6)$, C d'abscisse 5 et D d'abscisse 10.

On sait de plus que T_1 passe par $B(7;15)$

Par lecture graphique :

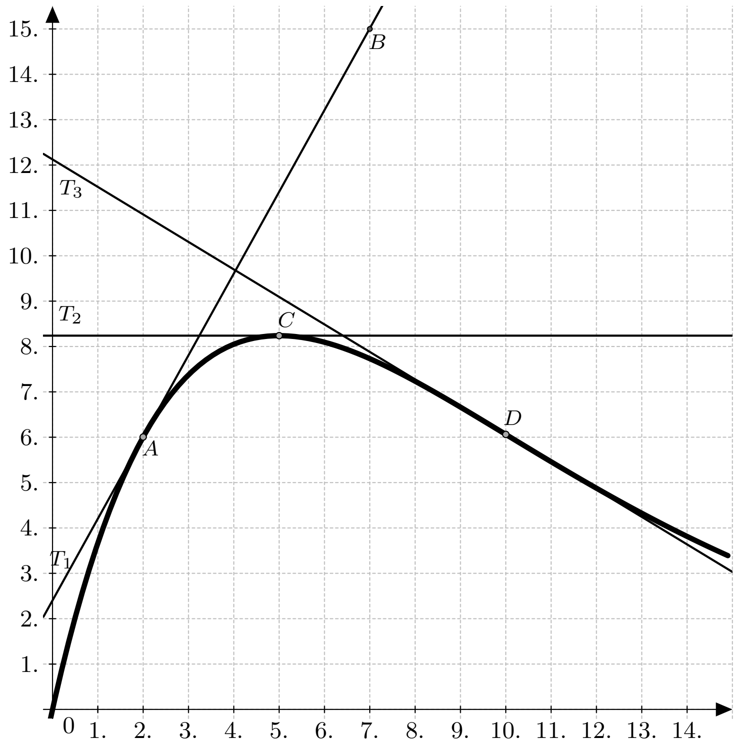
(1) a. Donner la valeur de $f(2)$ puis déterminer la valeur exacte de $f'(2)$.

b. En déduire l'équation de la tangente en 2.

(2) Résoudre l'équation $f'(x) = 0$.

(3) a. Indiquer si la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion. Si oui, préciser ce point.

b. En déduire l'intervalle sur lequel f est concave.



Partie B : Étude théorique

Soit f la fonction définie sur $[0;15]$ par $f(x) = 5x\mathrm{e}^{-0,2x-0,11}$.

(1) a. Vérifier que $f'(x) = (5-x)\mathrm{e}^{-0,2x-0,11}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0;15]$.

c. En déduire les variations de f et dresser son tableau de variations.

(2) Justifier que l'équation $f(x) = 7$ admet une unique solution sur $[0;5]$. Donner la valeur arrondie au dixième de cette solution.

Partie C : Application

Une entreprise d'applications mobiles lance une nouvelle application.

Un étude a modélisé le nombre d'utilisateurs par seconde lors des 15 premières semaines de cette application à l'aide de la fonction f.

x représente le nombre de semaines depuis le lancement du produit.

$f(x)$ représente le nombre d'utilisateurs à la seconde en dizaines de milliers.

(1) L'application est rentable à partir de 70000 utilisateurs par seconde. Au bout de combien de semaines (à la semaine près), l'entreprise rentrera dans ces frais ?

(2) Déterminer quand le nombre d'utilisateurs par seconde est maximal.