BACCALAURÉAT BLANC 2

Session Mai 2015

Lycée Alexandre Dumas, Saint-Cloud

Mathématiques - Série ES - Spécialité L

Pour les élèves suivant le cours de spécialité, l'exercice 3 de ce sujet est remplacé par l'exercice sur la feuille distribuée à part.

Sujet

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage d'une calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

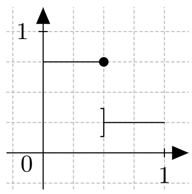
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

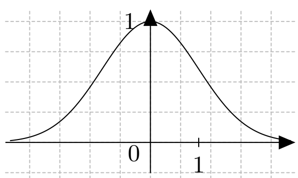
Le candidat s'assurera que le sujet est complet.

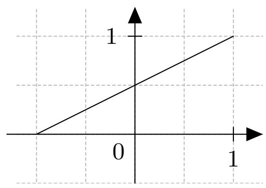
Chaque candidat devra indiquer le numéro de sa classe et le nom de son enseignant sur la copie.

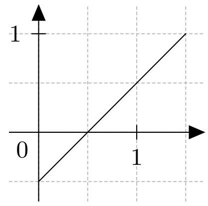
Le sujet ne sera pas rendu.

Exercice 1 : .... (5 points)

1. Parmi toutes les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ et dont l'expression algébrique est donnée ci-dessous, la seule qui est convexe sur $]0;+\infty[$ est :
   (a) x^3-3x^2+4 (b) $\ln(x)$ (c) $-\mathrm{e}^x$ (d) x^2+x+5
2. Parmi les courbes suivantes, indiquer celle qui représente une fonction de densité.
   (a) 

   (b) 

   (c) 

   (d) 

3. Une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=4x\mathrm{e}^{-x^2}$ est :
   (a) $F(x)=-2x^2\mathrm{e}^{-x^2}$ (b) $F(x)=-2\mathrm{e}^{-x^2}$ (c) $F(x)=(4-8x^2)\mathrm{e}^{-x^2}$ (d) $F(x)=-8x\mathrm{e}^{-x^2}$
4. L'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{3}{x}\mathrm{d}x$ est égale à :
   (a) $3\ln(2)$ (b) 2,079441542 (c) $\ln(6)-\ln(3)$ (d) $3\ln(x)$
5. X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[30;50]$.
   La probabilité que X soit plus grand que 35 est :
   (a) 0,25 (b) 0,35 (c) 0,70 (d) 0,75

Exercice 2 : .... (5 points)

Un serveur, travaillant dans une pizzeria, remarque qu'en moyenne, 40 % des clients sont des familles, 25 % des clients sont des personnes seules et 35 % des clients sont des couples.

Il note aussi que :

- Parmi les familles, 70 % laissent un pourboire ;
- Parmi les personnes seules, 90 % laissent un pourboire ;
- Parmi les couples, 40 % laissent un pourboire.

Un soir donné, ce serveur prend au hasard une table occupée dans la pizzeria.

On s'intéresse aux évènements suivants :

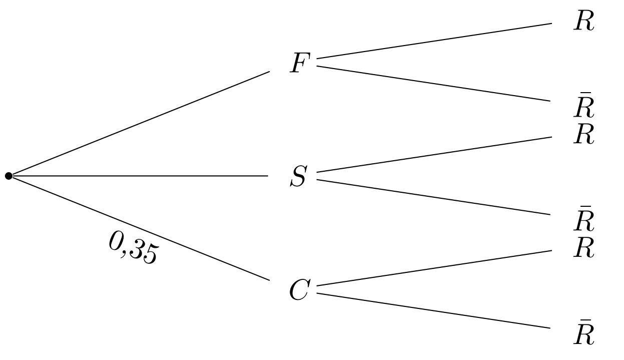
F : « la table est occupée par une famille »

S : « la table est occupée par une personne seule »

C : « la table est occupée par un couple »

R : « le serveur reçoit un pourboire »

On note $\overline{A}$ l'évènement contraire de A et $P_B(A)$ la probabilité de A, sachant B.



Partie A

1. D'après les données de l'énoncé, préciser sans calcul les probabilités $P(F)$ et $P_S(R)$.
2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessus :
3. (a) Calculer $P(F\cap R)$.
   (b) Vérifier que $P(R)=0{,}645$.
4. Sachant que le serveur a reçu un pourboire, calculer la probabilité que ce pourboire vienne d'un couple. Le résultat sera arrondi à 10^{-3} .

Partie B

On note X la variable aléatoire qui, à un soir donné, associe le montant total en euro des pourboires obtenus par le serveur.
On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 15$ et d'écart-type $\sigma = 4$.
Dans les questions suivantes, les résultats seront arrondis à 10^{-2}.

1. Soit f la densité associée à X. Représenter schématiquement la courbe associée à la fonction f.
2. (a) Hachurer sur le graphique précédent l'aire correspondant à la probabilité que le montant total des pourboires reçus par le serveur soit compris entre 7 et 23 euros puis donner sa valeur.
   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer $P(X \geqslant 20)$ puis interpréter le résultat.

Exercice 3 : .... (5 points)

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 0{,}9u_n + 1{,}2.$$

1. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 12$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 12 - 2 \times 0{,}9^n$.
2. Déterminer la limite et les variations de la suite (v_n) et en déduire celles de la suite (u_n).

Partie B

En 2012, la ville de Bellecité compte 10 milliers d'habitants. Les études démographiques sur les dernières années ont montré que chaque année :

- 10 % des habitants de la ville meurent ou déménagent dans une autre ville ;
- 1 200 personnes naissent ou emménagent dans cette ville.

1. Justifier rapidement que cette situation peut être modélisée par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre de milliers d'habitants de la ville de Bellecité l'année $2012 + n$.
2. Un institut statistique décide d'utiliser un algorithme pour prévoir la population de la ville de Bellecité dans les années à venir.

   Recopier et compléter l'algorithme ci-contre pour qu'il calcule la population de la ville de Bellecité l'année $2012 + n$.

```
VARIABLES
a, i, n.
INITIALISATION
Choisir n
a prend la valeur ...
TRAITEMENT
Pour i allant de 1 à n,
   a prend la valeur ....
SORTIE
Afficher ...
```

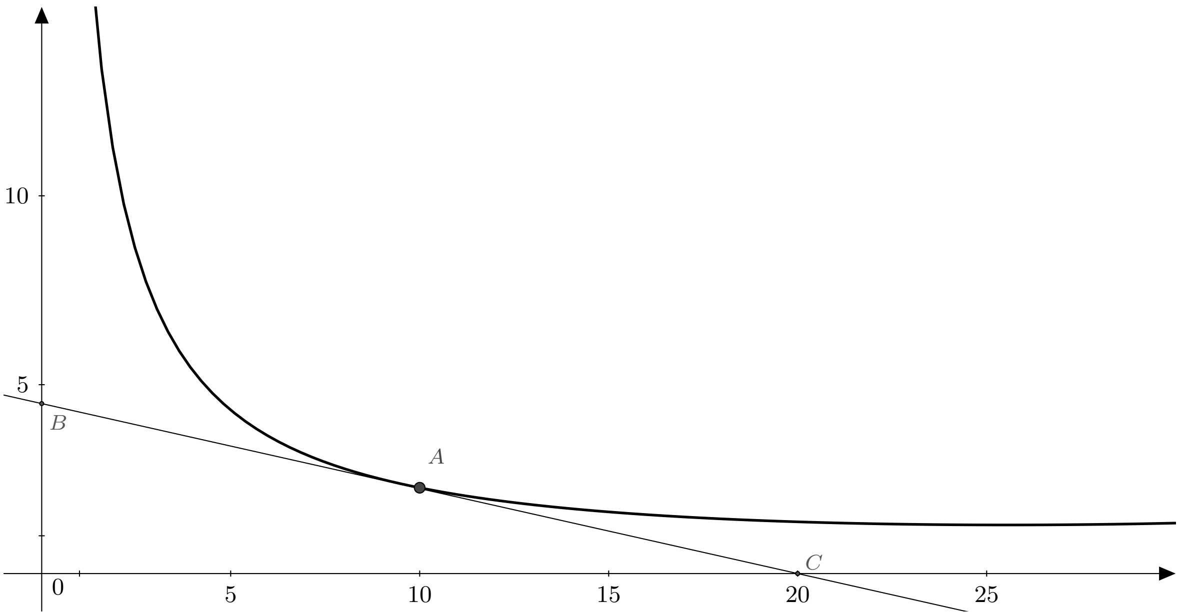
3. (a) Résoudre l'inéquation $12 - 2 \times 0{,}9^n > 11{,}5$.
   (b) En donner une interprétation.

Exercice 4 : .... (5 points)

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\,30]$.

Partie A

On a représenté la courbe $\mathscr{C}$ associée à f sur le graphique ci-dessous. A est le point de la courbe d'abscisse 10. On a aussi tracé la droite (BC) avec $B(0;4{,}5)$ et $C(20;0)$



1. Conjecturer le tableau de variations de f.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ en A.

Partie B

On admet maintenant que f est donnée par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{0{,}1x} + 20}{x}.$$

1. On désigne par f' la dérivée de la fonction f.
   Montrer que, pour tout $x \in [1\ ;\ 30]$, $f'(x) = \dfrac{(0{,}1x - 1)\mathrm{e}^{0{,}1x} - 20}{x^2}$.
2. On considère la fonction g définie sur $[1\,;\,30]$ par
   $$g(x) = (0{,}1x - 1)\mathrm{e}^{0{,}1x} - 20.$$
   (a) Montrer que la fonction g est strictement croissante sur $[1\,;\,30]$.
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution α dans $[1\,;\,30]$.
   (c) Donner un encadrement à 10^{-1} près de α.
   (d) En déduire le tableau de signes de $f(x)$ sur $[1\,;\,30]$.
3. Les limites de la lecture graphique.
   (a) Déduire de la question précédente les variations de f sur $[1\,;\,30]$.
   (b) Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 10.
   (c) Expliquer pourquoi les deux derniers résultats ne sont pas cohérents avec la lecture graphique.