Correction Bac blanc

Exercice 1 : ....

(1) La proposition est fausse.
On reconnaît un quotient.
On pose $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = x$, on a $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$. On a donc :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

(2) La proposition est vraie.
On a $3e^x - 2$ équivalent à $e^x = \frac{2}{3}$, la solution de cette équation est donc $\ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln(2) - \ln(3)$.

(3) Proposition fausse.
L'équation $3\ln(x) + 1 = -6$ est équivalente à $\ln(x) = -\frac{7}{3}$, donc la solution existe et $x = e^{-\frac{7}{3}}$.

(4) La proposition est fausse.
$3 - \ln(x) > 0$ est équivalente à $\ln(x) < 3$.

(5) La proposition est vraie.
Dérivons deux fois f. $f'(x) = \frac{1}{x} + 3$ et $f'' = -\frac{1}{x^2}$.
$f''(x)$ est donc négatif pour tout $x \in]0; +\infty[$ donc f est concave.

(6) Selon le cours, on a : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = 10 \times \frac{\left(1 - 0{,}9^{n+1}\right)}{1 - 0{,}9} = 100 \times \left(1 - 0{,}9^{n+1}\right).$$

Exercice 2 : ....

(1) Il y a 7000 abonnés au début de la première année, à la fin de celle-ci, il y a donc $7000 * 0{,}8 + 4000 = 9600$ abonnés.

(2) Chaque année, on multiplie a_n par 0,8 (réabonnement de 80%) puis on ajoute 4 (ce qui correspond aux 4000 abonnés supplémentaires).

(3) a. $u_{n+1} = a_{n+1} - 20 = 0{,}8a_n + 4 - 20 = 0{,}8a_n - 16 = 0{,}8(u_n + 20) - 16 = 0{,}8u_n$. Donc (u_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $u_0 = a_0 - 20 = 7 - 20 = -13$.
b. $u_n = -13 \times 0{,}8^n$.
c. Comme $a_n = u_n + 20$, on a $a_n = -13 \times 0{,}8^n + 20$
d. Comme $0 < 0{,}8 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} -13 \times 0{,}8^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 20$.

(4) a. $20 - 13 \times 0{,}8^n > 15$ est équivalente à $-13 \times 0{,}8^n > -5$ et encore $0{,}8^n < \frac{5}{13}$. n vérifie donc $n\ln(0{,}8) < \ln\left(\frac{5}{13}\right)$ comme $\ln(0{,}8) <)0$, n vérifie $n > \dfrac{\ln\left(\frac{5}{13}\right)}{\ln(0{,}8)} \approx 4{,}2$. Comme n est entier, n doit donc être supérieur ou égal à 5.
b. On en conclut que $a_n > 15$ lorsque $n \leqslant 5$ et donc il fat attendre 5 ans avant d'avoir un nombre d'abonnés supérieur à 15000.

(5) a.

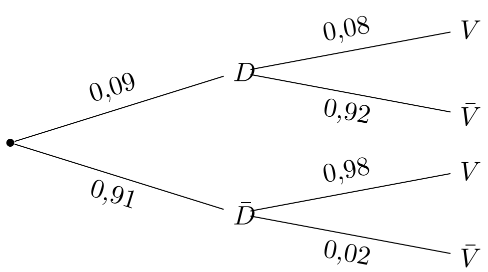
Valeur de n	0	1	2	3	4	5
Valeur de A	7	9,6	11,6	13,2	14,5	15,6
Condition $A \leqslant 15$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

b. L'affichage obtenue est 5.
c. Il faut attendre 5 ans avant d'avoir 15000 abonnés.

Exercice 3 : ....

Partie A :

(1)



(2) L'événement avoir un article fabriqué qui ait un défaut et soit mis en vente et $D \cap V$.

$$P(D \cap V) = P(D) \times P_D(V) = 0{,}09 \times 0{,}08 = 0{,}0072$$

(3) Selon la formule des probabilités totales :

$P(V) = P(D\cap V)+P(\bar{\cap}V) = 0{,}0072+0{,}91\times 0{,}98 = 0{,}899$

(4) La probabilité que l'article soit défectueux sachant qu'il est bon pour la vente est $P_V(D)$. On a donc $P_V(D) = \dfrac{P(D\cap V)}{P(V)} = \dfrac{P(D)\times P_D(V)}{P(V)} \approx 0{,}008$.

Partie B :

(1) Prélever un article dans le stock est une épreuve de Bernoulli de succès : « l'article est défectueux »de probabilité 0,008.
On répète 50 fois cette expérience de façon identiques et indépendantes.
X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}008$

(2) $P(X = 2) = \binom{50}{2} \times 0{,}008^2 \times 0{,}992^{48} \approx 1225 \times 0{,}008^2 \times 0{,}992^{48} \approx 0{,}05$. La probabilité de trouver deux articles qui ont un défaut est d'environ 0,05

(3) $P(X = 0) \approx 0{,}67$ et $P(X = 1) \approx 0{,}27$. Comme $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$, on a $P(X \geqslant 2) \approx 0{,}06$

Exercice 4 : ....

Partie A : Étude graphique

Par lecture graphique :

(1) a. $f(2) = 6$ et $f'(2) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{15-6}{7-2} = \frac{9}{5}$

b. L'équation réduite de la tangente en 2 est donc $y = \frac{9}{5}x + \frac{12}{5}$

(2) $f'(x) = 0$ lorsque $x = 5$ (la tangente est horizontale)

(3) a. La courbe admet un point d'inflexion. Il s'agit de D.

b. f est concave sur $[0; 10]$.

Partie B : Étude théorique

Soit f la fonction définie sur $[0; 15]$ par $f(x) = 5x\mathrm{e}^{-0{,}2x-0{,}11}$.

(1) a. On pose $u(x) = 5x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-0{,}2x-0{,}11}$. On a $u'(x) = 5$ et $v'(x) = -0{,}2\mathrm{e}^{-0{,}2x-0{,}11}$.
Donc $f' = 5\mathrm{e}^{-0{,}2x-0{,}11} + 5x \times (-0{,}2\mathrm{e}^{-0{,}2x-0{,}11}) = (5-x)\mathrm{e}^{-0{,}2x-0{,}11}$

b. $\mathrm{e}^{-0{,}2x-0{,}11} > 0$ pour tout x dans $\mathbb{R}$. $(5-x) > 0$ lorsque $x < 5$. On obtient donc sur $[0; 15]$

x	0		5		15
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$25\mathrm{e}^{-1{,}11}$	$\searrow$	$75\mathrm{e}^{-3{,}11}$

(2) f est continue sur $[0; 5]$, f est strictement croissante sur $[0; 5]$ et $f(0) = 0$ et $f(5) \approx 8{,}24 > 7$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 7$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0; 5]$.
$f(2{,}6) \approx 6{,}9$ et $f(2{,}7) \approx 7{,}04$ donc une valeur arrondie au dixième est 2,7

Partie C : Application

(1) f est strictement croissante sur $[0; 5]$ et $f(x) = 7$ lorsque $x \approx 2{,}7$. Donc pour l'entreprise rentre dans ses frais, il faut attendre 3 semaines.

(2) Selon le tableau de variations, f admet un maximum en 5. Le nombre d'utilisateur est maximal au bout de 5 semaines.