Exercice 1 : (7 points)

(1) $f(1) = -3$.

(2) $f'(1) = -1$, donc $y = -(x-1) - 3 = -x - 2$

(3) $S = \{-2; 0; 2\}$

(4) Graphiquement, on observe deux solutions.

(5) Donner le tableau de signes de f.

(6) On a le tableau de variations puis de signes de f :

x	-2		$-1{,}25$		$1{,}25$		2
f	0	↗	$3{,}2$	↘	$-3{,}2$	↗	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 2 : (13 points)

(1) Sur $[0;5]$, $x+1 \neq 0$, donc la fonction f est dérivable sur cet intervalle comme quotient de fonctions dérivables.

On pose $u(x) = x + 11$, $v(x) = x + 1$, on a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 1$, ainsi :

$$f'(x) = 2x + \frac{x+1-x-11}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+1)^2 - 10}{(x+1)^2} = \frac{2x(x^2+2x+1) - 10}{(x+1)^2} = \frac{2x^3+4x^2+2x-10}{(x+1)^2}.$$

(2) a. g est dérivable comme fonction polynôme, donc : $g'(x) = 6x^2 + 8x + 2$

b. Le discriminant vaut $\Delta = 16 = 4^2$ et les racines sont $x_1 = -1$ et $x_2 = -\frac{1}{3}$

Comme le coefficient dominant est positif, sur $[0;5]$, on a :

x	0		5
$g'(x)$		$+$	
g	-10	↗	350

c. — g est continue sur $[0;5]$
— g est strictement croissante sur $[0;5]$
— $g(0) = -10 < 0$ et $g(5) = 350 > 0$

Selon le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0;5]$.

d. à 0,001 près, α vaut 1,116

e. Comme g est strictement croissante, on a :

x	0		α		5
g		$-$	0	$+$	

(3) Comme $(x+1)^2 > 0$ et $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$, f est du signe de g. On a donc :

x	0		α		5
f	10	↘	$f(\alpha)$	↗	$\frac{80}{3}$

Dresser le tableau de variations de f sur $[0;5]$. On établira le lien avec la question 2.

(4) Graphiquement, on trouve $x \approx 3{,}43$

Partie B : Application économique

(1) Il faut produire 112 cartes.

(2) $f(1{,}12) = 6$, le coût est donc de 597 euros.

(3) Selon la partie précédente, il faut produire au plus 343 cartes.