

Durée 2 heures . Le barème est donné à titre indicatif.
Le manque de soin et de clarté dans la rédaction sera pénalisé.

Nom et Prénom :

Exercice 1 : Probabilités (45 minutes)

(7 points)

Dans un restaurant on propose trois menus : A, B et C

Le menu A est composé d'une entrée et d'un plat, le menu B est composé d'un plat et d'un dessert et le menu C est composé d'une entrée, d'un plat et d'un dessert.

Le client peut-ensuite prendre s'il le souhaite un verre de vin.

Partie A :

On a remarqué que la moitié des clients prend le menu A, $\frac{3}{10}$ le menu B et les autres le menu C.

Parmi les clients qui prennent le menu A, $\frac{2}{3}$ prennent aussi un verre de vin.

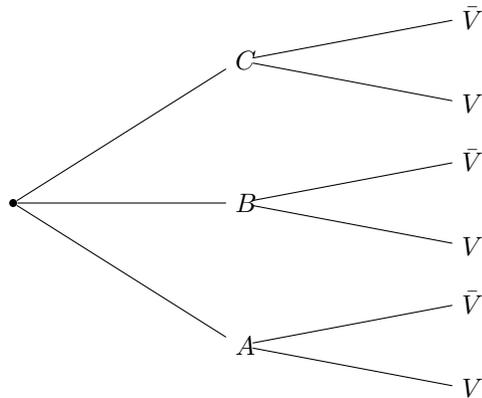
Parmi les clients qui prennent le menu B, $\frac{1}{3}$ prennent aussi un verre de vin.

Sur l'ensemble des clients, 10% prennent le menu C et un verre de vin.

On choisit au hasard un client du restaurant.

On appelle A : « choisir un client qui a pris le menu A », B : « choisir un client qui a pris le menu B », C : « choisir un client qui a pris le menu C » et V « choisir un client qui a pris un verre de vin ».

- (1) Donner $P(C)$ et $P(C \cap V)$. En déduire $P_C(V)$. Compléter l'arbre de probabilité ci-joint.



- (2) Déterminer $P(A \cap V)$.
- (3) Montrer que $P(V) = \frac{8}{15}$
- (4) On choisit une personne ayant pris un verre de vin. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi le menu B ?
- (5) On admet que le menu A coûte 14 euros, le menu B coûte 16 euros, le menu C 20 euros et le verre de vin est à 4 euros.
Soit X la variable aléatoire correspondant au prix payé par un client.

- a. Donner les valeurs prises par X.

- b. Compléter le tableau ci-dessous :

x_i	14				
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$				

- c. Quel est le prix moyen que le restaurateur peut espérer par client ?

Partie B :

On imagine que le nombre de clients de ce restaurant est très important. On interroge au hasard 10 clients. Soit Y le nombre de clients qui ont choisi de prendre du vin.

- (1) Donner les valeurs prises par Y.
- (2) Justifier que Y suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
- (3) Donner la formule de $P(Y = k)$ puis déterminer $P(Y = 2)$ et $P(Y \leq 8)$ (les valeurs seront arrondies aux millièmes).
- (4) Donner $E(Y)$.

Exercice 2 : Suites (30 minutes)

(6 points)

Un magazine est vendu uniquement par abonnement (les abonnements doivent être renouvelés chaque année). On a constaté qu'il y a 1800 nouveaux abonnés chaque année et que d'une année sur l'autre, 15% des abonnés ne se réabonnent pas.

En 2014, il y avait 8000 abonnés.

La situation peut-être modélisée par une suite (u_n) admettant pour premier terme $u_0 = 8$, le terme u_n désignant le nombre de milliers d'abonnés en $(2014 + n)$.

- (1) Calculer u_1 et u_2 et interpréter ces résultats.
- (2) Montrer que $u_{n+1} = 0,85u_n + 1,8$.
- (3) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 12$.
- a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
- b. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 12 - 4 \times 0,85^n$$

- (4) a. Donner le sens de variation et la limite de la suite (v_n) . En déduire ceux de la suite (u_n) .

b. Si la tendance se poursuit, le magazine parviendra-t'il à dépasser la barre des 12000 abonnés? Justifier.

(5) On donne l'algorithme suivant :

Variables :	U, N
Initialisation :	U prend la valeur 8 N prend la valeur 0
Traitement :	Tant que $U \leq 10$ U prend la valeur $0,85 \times U + 1,8$ N prend la valeur $N + 1$ Fin du Tant que
Sortie	Afficher $2014 + N$.

a. Recopier et compléter autant que nécessaire le tableau suivant. Les résultats seront arrondis aux centièmes.

Valeur de N	0	1	
Valeur de U	8		
Condition $U \leq 10$	vrai		

b. Dans le contexte de cet exercice, expliquer comment interpréter le nombre obtenu en sortie de cet algorithme.

(6) **Question ouverte :**

Chaque abonné envoie lors de son inscription annuelle un chèque de 25 €. Modifier cet algorithme pour que le propriétaire du magazine sache au bout du combien d'années il aura récolté au total plus de 10 millions d'euros.
Indication : On pourra introduire une nouvelle variable qui permettrait de calculer le nombre total d'abonnés

Exercice 3 : Fonctions (45 minutes)

(7 points)

Partie A : Lecture graphique

On a représenté dans le repère ci-contre une fonction f définie sur $[0; 9]$. On admet que \mathcal{T} est la tangente à \mathcal{C}_f (courbe représentant f) en 0 et qu'elle passe par $A(0; -1)$ et $B(0,5; 0,5)$.

On a aussi tracé la tangente en C à \mathcal{C}_f . C étant le point de \mathcal{C}_f d'abscisse 5.

- Donner les valeurs de $f(0)$ et de $f(1)$.
- Donner une valeur approchée des solutions éventuelles de $f(x) = 0$.
- Résoudre graphiquement $f(x) > 1$.
- La courbe de f admet-elle un point d'inflexion et si oui pour quel x ? Sur quel intervalle semble-t'elle concave?
- Résoudre graphiquement $f'(x) = 0$. On justifiera rapidement.
- Donner le tableau de signes de f' .
- Déterminer $f'(0)$.
- On admet que $f(x) = (ax + b)e^{-0,5x} + 1$.
 - Vérifier que $f'(x) = (-0,5ax - 0,5b + a)e^{-0,5x}$.
 - En déduire une expression de $f'(0)$ puis de $f(0)$ en fonction de a et de b .

c. En utilisant les valeurs obtenues graphiquement de $f(0)$ et $f'(0)$ déterminer a et b .

Partie B : Étude de la fonction :

On admet que f est définie sur $[0; 9]$ par $f(x) = (2x - 2)e^{-0,5x} + 1$.

- Dériver f , puis dresser le tableau de signes de f' sur $[0; 9]$. En déduire le tableau de variations de f sur $[0; 9]$.
- Démontrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; 3]$, puis sur $[0; 9]$. Déterminer à l'aide de la calculatrice un encadrement à 10^{-2} de α .
- Une entreprise produit entre 0 et 900 objets par jours. La fonction f représente le bénéfice journalier en milliers d'euros de cette entreprise en fonction de x le nombre d'objets produits en centaine. Par exemple $f(1) = 1$ signifie que pour une production de 100 objets, l'entreprise réalise un bénéfice de 1000 euros.
 - Pour quelle production le bénéfice est-il maximale?
 - Sur quel intervalle de production l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice? On arrondira à l'objet près

