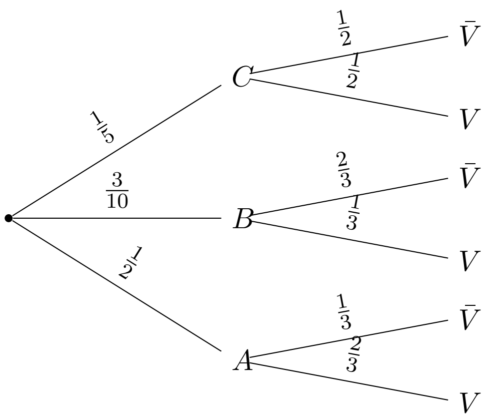
Durée 2 heures . Le barème est donné à titre indicatif.
Le manque de soin et de clarté dans la rédaction sera pénalisé.

Nom et Prénom :

Exercice 1 : Probabilités

Partie A :

(1) $P(C) = 1 - P(A) - P(B) = \frac{1}{5}$. $P(C \cap V) = \frac{1}{10}$, donc $P_C(V) = \frac{P(C \cap V)}{P(C)} = \frac{1}{2}$



(2) $P(A \cap V) = P(A) \times P_A(V) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

(3) Selon les formules des probabilités totales, on a

$$P(V) = P(A \cap V) + P(B \cap V) + P(C \cap V) = \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{5}{15} + \frac{3}{30} + \frac{3}{30} = \frac{7}{15}.$$

(4) $P_V(B) = \dfrac{P(B \cap V)}{P(V)} = \dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{8}{15}} = \frac{3}{16}$

La probabilité qu'une personne ayant pris un verre de vin ait choisit le menu B est $\frac{3}{16}$.

(5) a. X prend les valeurs $14, 16, 18, 20, 24$

b.

x_i	14	16	18	20	24
$P(X = x_i)$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{10}$

c. $E(x) = \frac{269}{15}$ Le prix moyen que le restaurateur peut espérer est $\frac{269}{15}$

Partie B :

(1) Y prend les valeurs $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$.

(2) Interroger un client est une épreuve de Bernoulli de succès : « Le client prend du vin »de probabilité $\frac{8}{15}$. Interroger 10 clients correspond à la répétition de 10 épreuves identiques et indépendantes. La variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès suit donc la loi Binomiale de paramètres 10 et $\frac{8}{15}$.

(3) $P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{10-k}$ donc $P(X = 2) = \binom{10}{2} \times (8/15)^2 \times (7/15)^2 \approx 0{,}029$.

$P(X \leqslant 8) = 1 - P(X = 9) - P(X = 10) \approx 0{,}982$

(4) $E(Y) = 10 \times \frac{8}{15} = \frac{16}{3}$.

Exercice 2 : Suites

(1) $u_1 = 8 \times 0{,}85 + 1{,}8 = 8{,}6$ et $u_2 = 8{,}6 \times 0{,}85 + 1{,}8 = 9{,}11$. En 2015 il y aura 8600 abonnés et en 2016, il y aura 9110 abonnées

(2) La baisse de 15% correspond à la multiplication par 0,85. Les 1800 nouveaux abonnés correspondent à une addition de 1,8 (puisque u_n est exprimé en milliers) pour passer de u_n à u_{n+1}

(3) a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 12 = u_n \times 0{,}85 + 1{,}8 - 12 = u_n \times 0{,}85 - 10{,}2 = (v_n + 12) \times 0{,}85 - 10{,},2 = v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}85$ etde premier terme $v_0 = u_0 - 12 = 8 - 12 = -4$.

b. On a donc $v_n = -4 \times 0{,}85^n$ et $u_n = v_n + 12 = -4 \times 0{,}85^n + 12$

(4) a. $0 < 0{,}85 < 1$ donc la suite géométrique $(0{,}85^n)$ est décroissante et la suite v est croissante (multiplication par un nombre négatif). Ajouter 12 ne change rien au sens de variation donc u est croissante.
$0 < 0{,}85 < 1$ donc la suite géométrique $(0{,}85^n)$ tend vers 0, la suite v aussi. $u = v + 12$ tend donc vers 12.

(5)

Valeur de N	0	1	2	3	4	5
Valeur de U	8	8,6	9,11	9,54	9,91	10,22
Condition $U \leqslant 10$	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux

Le nombre affiché en sortie est l'année à partir de quand le magazine aura 10000 abonnés.

(6)

```
Variables :        U, N
Initialisation :   U prend la valeur 8 × 25
                   S prend la valeur U
Traitement :       Tant que S ⩽ 10000
                      U prend la valeur 0,85 × U + 1,8
                      S prend la valeur S + U
                   Fin du Tant que
Sortie             Afficher 2014 + N.
```

Exercice 3 : Fonctions

Partie A : Lecture graphique

(1) $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$

(2) $x \approx 0{,}5$

(3) $S =]1; 9]$

(4) Le point d'inflexion est le point de la courbe d'abscisse 5. La fonction est concave sur $[0; 5]$

(5) $f'(x) = 0$ lorsque $x = 3$ car c'est le seul endroit où la tangente est horizontale.

(6) $f'(x) > 0$ sur $[0; 3[$ et $f'(x) < 0$ sur $]3; 9]$

(7) $f'(0) = 3$

a. On pose $u(x) = ax + b$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-0,5x}$. On a $u'(x) = a$ et $v'(x) = -0{,}5\mathrm{e}^{-0,5x}$. Donc $f'(x) = a\mathrm{e}^{-0,5x} - 0{,}5(ax+b)\mathrm{e}^{-0,5x} = (-0{,}5ax - 0{,}5b + a)\mathrm{e}^{-0,5x}$

b. $f(0) = b + 1$ et $f'(0) = -0{,}5b + a$.

c. Ainsi $b + 1 = -1$ donc $b = -2$ et $-0{,}5b + a = 3$ donc $a = 3 + 0{,}5 \times -2 = 2$.

Partie B : Étude de la fonction :

(1) On pose $u(x) = 2x - 2$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-0,5x}$. On a $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -0{,}5\mathrm{e}^{-0,5x}$. Donc $f'(x) = 2\mathrm{e}^{-0,5x} - 0{,}5(2x-2)\mathrm{e}^{-0,5x} = (-x + 1 + 2)\mathrm{e}^{-0,5x} = (-x+3)\mathrm{e}^{-0,5x}$

$\mathrm{e}^{-0,5x} > 0$ pour tous réels x donc $f'(x)$ est du signe de $-x+3$ donc positif sur $[0; 3[$ et négatif sur $]3; 9]$. On obtient donc le tableau de variations :

x	0		3		9
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↗	$4\mathrm{e}^{-1,5} + 1$	↘	$16\mathrm{e}^{-4,5} + 1$

(2) f est une fonction continue sur $[0; 3]$, strictement croissante sur cet intervalle et $f(0) = -1$ et $f(3) \approx 1{,}89$.

Selon le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution à l'équation $f(x) = 0$ sur $[0; 3]$.

f est strictement décroissante et continue sur $[3; 9]$ donc $f(x) \geqslant f(9)$ sur $[3; 9]$. Comme $f(9) \approx 1{,}18$, on en conclut que $f(x) > 0$ donc $f(x) \neq 0$ sur $[3; 9]$. $f(x) = 0$ admet donc une unique solution sur $[0; 9]$.

À l'aide de la calculatrice, on a $\alpha \in [0{,}39; 0{,}4]$.

(3) a. La fonction admet un maximum en 3, donc le bénéfice maximal est atteint pour 300 objets.

b. La fonction est continue et croissante sur $[\alpha; 3]$ et $f(\alpha) = 0$, donc $f(x) \geqslant 0$ sur $[\alpha; 3]$. On a vu que $f(x) > 0$ sur $[3; 9]$ donc $f(x) > 0$ sur $[\alpha; 9]$. On en conclut que l'entreprise réalise un bénéfice avec une production entre 40 et 900 objets.