Durée 1 heure . Le barème est donné à titre indicatif.
Le manque de soin et de clarté dans la rédaction sera pénalisé.

Nom et Prénom :

Exercice 1 : QCM : (15 minutes) .... (5 points)

Pour chacune des propositions proposées, une seule est exacte. Donner sans aucune justification l'affirmation vraie.

Attention, donner une réponse fausse enlève des points.

(1) L'équation $2 + 3\ln x = 0$ a pour solution
A. $\frac{1}{e^{\frac{2}{3}}}$ B. $\frac{e^2}{e^3}$ C. $-\frac{2}{3}$

(2) La valeur exacte de $\ln(10e^2)$ est A. $2\ln(10e)$ B. $4{,}302585093$ C. $\ln(10) + 2$

(3) On désigne par n un nombre entier naturel. L'inégalité $0{,}7^n \leqslant 0{,}01$ est réalisée dès que :
A. $n \geqslant 12$ B. $n \leqslant 13$ C. $n \geqslant 13$

(4) L'équation $5e^{2x} - 2$ admet comme solution :
A. $\dfrac{\ln 2}{\ln 5^2}$ B. $\dfrac{\ln 2 - \ln 5}{2}$ C. $\dfrac{\ln\left(\dfrac{2}{5}\right)}{\ln 2}$

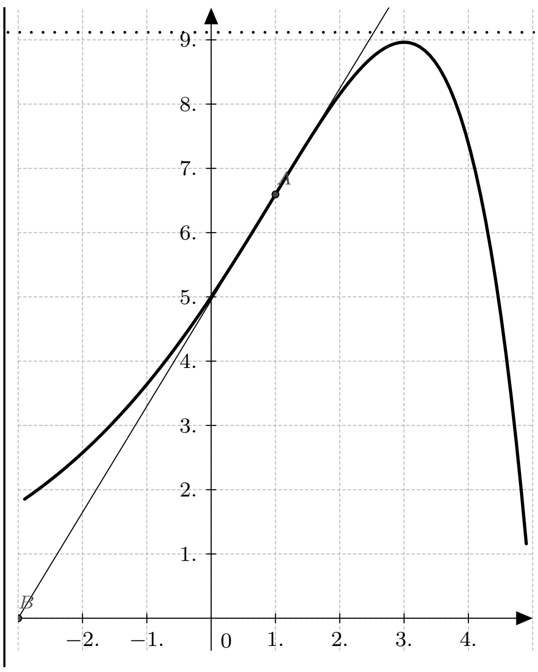
(5) Le nombre -3 est solution de l'équation d'inconnue est x :
A. $\ln x = -\ln 3$ B. $\ln(e^x) = -3$ C. $e^{\ln x} = -3$

Exercice 2 : Calcul d'intégrale (15 minutes) .... (5 points)

La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'ensemble des nombres réels.

Elle passe par le point $A\left(1\ ;\ 4e^{0,5}\right)$.

1. Quel est le signe de $f'(1)$? Justifier.
2. Que semble représenter le point A pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
3. (a) Préciser un domaine du plan dont l'aire est égale à $I = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ unités d'aires.
   (b) Hachurer ce domaine sur la courbe.
   (c) Recopier sur votre copie le seul encadrement qui convient parmi :
   $5 \leqslant I \leqslant 9$ $10 \leqslant I \leqslant 12$ $20 \leqslant I \leqslant 24$



Exercice 3 : Étude d'une fonction (25 minutes) .... (10 points)

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[1; 10]$ par :

$$g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x.$$

(1) a. Montrer que g est strictement décroissante sur l'intervalle $[1; 10[$.
b. Démonter que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1; 10]$. Avec la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.
c. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

(2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1; +10]$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{1 + x^2}.$$

a. Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout $x \geqslant 1$, on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x(1 + x^2)^2}.$$

b. Déduire de la question 1, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[1; 10]$.

(3) Une entreprise lance un nouvel accessoire de mode dont elle a le monopole. Pour x milliers d'accessoires fabriqués, avec $1 \leqslant x \leqslant 10$, elle estime que le bénéfice moyen par accessoire en milliers d'euros est $f(x)$.
Combien d'accessoires (à l'unité) doit fabriquer l'entreprise pour avoir un bénéfice moyen maximal.