Exercice 1 : Calcul de primitive .... (6 points)

Pour chaque fonction suivante, déterminer une primitive F de f sur $[1;5]$ puis la primitive G de f sur $[1;5]$ tel que $G(3) = 1$

(1) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x$. $G(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x + 5{,}5$.

(2) $F(x) = \frac{x^2}{2} - 5x + \ln x$. $G(x) = \frac{x^2}{2} - 5x + \ln x - \ln 3 + 11{,}5$

(3) $F(x) = -2\mathrm{e}^{-0{,}5x}$ et $G(x) = -2\mathrm{e}^{-0{,}5x} + 2\mathrm{e}^{-1{,}5} + 1$

(4) $F(x) = \frac{1}{2}\ln^2 x$ $F(x) = \frac{1}{2}\ln^2 x - \frac{1}{2}\ln^2 3 + 1$

Exercice 2 : Problème .... (14 points)

Partie A

1. $f(2) = 0$ et $f'(0) = 0$ (tangente horizontale).
2. $f'(x) = -\mathrm{e}^{ax} + (b - x)a\mathrm{e}^{ax} = \mathrm{e}^{ax}(-ax + ab - 1)$.
3. $f(2) = (b - 2)\mathrm{e}^{2a}$ et $f'(0) = -1 + ba$. Comme d'autre part $f(2) = 0$ et $f'(0) = 0$, on a bien le système
4. $$\left\{\begin{array}{lcl} b - 2 & = & 0 \\ ab - 1 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} b & = & 2 \\ a & = & \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Partie B

1. (a) Il faut hachurer entre 0 et 2 sous la courbe

   (b) On a $2 \leqslant \displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 4$. Un carreau correspond à une unité d'aire. On voit qu'un carreau est entièrement remplie et que deux autres sont remplies à plus de la moitié. D'autre part le carré de côté de n'est pas remplie.
2. (a) $F'(x) = -20{,}5\mathrm{x} + (-2x + 8) \times 0{,}5\mathrm{e}^{0{,}5x} = \mathrm{e}^{0{,}5x}(-x + 2) = f(x)$ donc F est bien une primitive de f.

   (b) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = F(2) = F(0) = 4\mathrm{e} - 8$. À 10^{-2} près, on a 2,87
3. La valeur moyenne de la fonction est $\frac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{4\mathrm{e} - 8}{2}$
4. On observe graphiquement le signe de f. On remarque que f est positive sur $]-\infty; 2[$ et négative sur $]2; +\infty[$. Une primitive G de f doit donc être croissante sur $]-\infty; 2[$ et décroissante sur $]2; +\infty[$. Seule la courbe C_3 vérifie ça.