Problème

Solution:

1. (a) Pour $x \neq 1$, on a $\dfrac{x+1}{x^3-1} = \dfrac{1+\frac{1}{x}}{x^2\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}$, le numérateur converge vers 1 et le dénominateur divergen vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.
   Par quotient, on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
   Lorsque x tend vers 1, le numérateur tend ves 2 et le dénominateur vers 0. Si $x > 1$, alors $x^3 - 1 > 0$ donc par quotient, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$.
   Sinon $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$
   (b) $y = 0$ est une asymptote horizontale et $x = 1$ est une asymptote verticale.
2. f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ comme quotient de polynômes avec un dénominateur non nul.
   On pose $u(x) = x + 1$ et $v(x) = x^3 - 1$, on a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 3x^2$ donc :
$$f'(x) = \frac{(x^3-1) - (x+1) \times 3x^2}{(x^3-1)^2} = \frac{-2x^3 - 3x^2 - 1}{(x^3-1)^2}.$$
3. (a) P est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.
   $P'(x) = -6x^2 - 6x = -6x(x+1)$. P' a donc deux racines 0 et -1.
   Le coefficient dominant est négatif, $P'(x)$ est donc négatif sur $]-\infty; -1[\cup]0; +\infty$ et positif ailleurs.
   P est donc strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$ et $]0; +\infty[$ et strictement croissante ailleurs.
   (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = -\infty$ et $P(-1) = -6$ et $P(0) = -1$.
   P est continue sur $[-1; +\infty[$, son maximum est donc $P(0) = -1 < 0$. $P(x) = 0$ n'admet donc pas de solution sur $[-1; +\infty[$.
   P est continue sur $]-\infty; -1[$, P est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$ et $P(-1) = -6$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires $P(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-\infty; -1[$.
   Donc $P(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
   Avec la calculatrice, on a $\alpha \approx -1{,}68$.
   (c) Comme $P(x)$ est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$, on en déduit que $P(x) > 0$ pour $x < \alpha$ et $P(x) < 0$ pour $x > \alpha$.
4. $(x^3-1)^2 \geqslant 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $P(x)$ (et non définie en 1).
   Avec les limites calculées précédemment, on en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0