Exercice 1 : Déviation

Pour chaque fonction suivante déterminer son ensemble de dérivabilité, puis calculer sa dérivée.

1. $f_1(x) = (3x^2 - 5)^4$
2. $f_2(x) = \dfrac{2}{(3x^2 - 5)^4}$
3. $f_3(x) = \sin(4x - 5)$

Exercice 2 : Étude d'une fonction du type $\sqrt{u}$

On définit la fonction f par $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$

1. Étudier l'ensemble de définition de f.
2. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f puis calculer la dérivée de f.
4. En déduire les variations de f sur cet ensemble.
5. Déterminer l'équation de la tangente en $x = 1$ à $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.
6. Calculer $f(-1 + x)$ et $f(-1 - x)$ pour $x \geqslant 1$. Que peut-on en déduire pour la courbe f ?
7. Représenter graphiquement schématiquement la courbe f.

Exercice 3 : Étude du nombre j

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

On donne le nombre complexe $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

Partie A : propriétés du nombre j

1. (a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation
$$z^2 + z + 1 = 0.$$
   (b) Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.
2. Démontrer les égalités suivantes :
   (a) $\mathrm{j}^3 = 1$;
   (b) $\mathrm{j}^2 = -1 - \mathrm{j}$.
3. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes $1, \mathrm{j}$ et j^2 dans le plan.
   (a) Placer les points dans le plan (on laissera les traits de construction)
   (b) Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

Partie B : Le module d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe et M son image dans le plan complexe.
Le module de z, noté $|z|$, est la distance OM : $|z| = OM$

1. Soient x et y deux réels tels que $z = x + iy$. Exprimer $|z|$ en fonction de x et y.
2. Montrer que $|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2|$

Partie C : Application du module

Soient a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + \mathrm{j}b + \mathrm{j}^2 c = 0$.
On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. En utilisant la question A - 2. b., démontrer l'égalité : $a - c = \mathrm{j}(c - b)$.
2. En déduire que AC = BC .
3. Démontrer l'égalité : $a - b = \mathrm{j}^2(b - c)$.
4. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.