Exercice 1 : Problème

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.

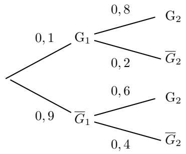
On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'évènement « le joueur gagne la n-ième partie » ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n.

On a donc $p_1 = 0{,}1$.

1. Montrer que $p_2 = 0{,}62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

Solution:
On a l'arbre pondéré suivant :
G_1 et $\overline{G_1}$ forment un système complet d'événements.
Donc d'après la formule des probabilité totale.
On a $p_2 = p\left(\mathrm{G}_1\right) \times p_{\mathrm{G}_1}\left(\mathrm{G}_2\right) + p\left(\overline{\mathrm{G}_1}\right) \times p_{\overline{(\mathrm{G}_1)}}\left(\mathrm{G}_2\right)$
$= 0{,}1 \times 0{,}8 + 0{,}9 \times 0{,}6 = 0{,}08 + 0{,}54 = 0{,}62$.



2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.

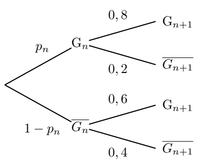
Solution: Il faut trouver $p_{\mathrm{G}_2}\left(\overline{\mathrm{G}_1}\right) = \dfrac{p\left(\overline{\mathrm{G}_1} \cap \mathrm{G}_2\right)}{p\left(\mathrm{G}_2\right)} = \dfrac{0{,}54}{0{,}62} = \dfrac{27}{31}$.

3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.

Solution: La probabilité que le joueur ne gagne aucune des trois parties est égale à $0{,}9 \times 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}144$.
La probabilité qu'il gagne au moins une partie est donc égale à
$1 - 0{,}144 = 0{,}856$.

4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,
$p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{3}{5}$.

Solution:
À la partie n, on a l'arbre suivant :
G_n et $\overline{G_n}$ forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :
$p_{n+1} = p\left(\mathrm{G}_n\right) \times p_{\mathrm{G}_n}\left(\mathrm{G}_{n+1}\right) + p\left(\overline{\mathrm{G}_n}\right) \times p_{\overline{\mathrm{G}_n}}\left(\mathrm{G}_{n+1}\right)$
$= p_n \times 0{,}8 + (1 - p_n) \times 0{,}6 = 0{,}8p_n + 0{,}6 - 0{,}6p_n = 0{,}2p_n + 0{,}6 = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{3}{5}$.



5. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.

Solution:
Pour tout entier n, on appelle $P(n)$ la proposition : « $p_n = \frac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$ ».

Initialisation : On a bien $\dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^1 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{20} = \dfrac{15 - 13}{20} = \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1 = p_1$.
Donc $P(1)$ est vraie

Hérédité :
Soit n un entier naturel tel que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie.
$P(n+1)$ s'écrit : « $p_n = \frac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$ ».
D'après la formule démontrée à la question 4 :
$p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{3}{5}$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $p_n \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$
Donc $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}\left[\dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n\right] + \dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{5} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1} = \dfrac{3}{20} + \dfrac{12}{20} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}$. La propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion
On a donc démontré par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}^*, p_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.

6. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

Solution:
Comme $-1 < \dfrac{1}{5} < 1$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$.

7. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on : $\dfrac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$?

Solution: Pour tout entier n, $p_{n+1} - p_n = -\frac{13}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n \times \left(\frac{1}{5} - 1\right) = \frac{13}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n \times \frac{4}{5} > 0$. Donc (p_n) est strictement croissante et $\left(\frac{3}{4} - p_n\right)$ est strictement décroissante.
Il suffit donc de déterminer le plus petit entier N tel que $\frac{3}{4} - p_N < 10^{-7}$. À l'aide de la calculatrice (on peut utiliser un algorithme), on a $\frac{3}{4} - p_{10} > 10^{-7}$ et $\frac{3}{4} - p_{11} < 10^{-7}$. Donc l'inéquation est vérifiée pour $n \geqslant 11$