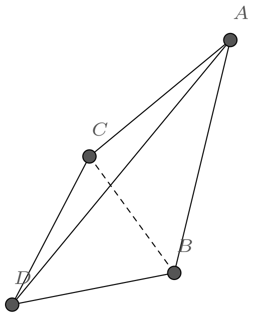
Exercice 1 :

$ABCD$ est un tétraèdre posé sur la face BCD. On place I milieu de $[BC]$, J sur $[AC]$ tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$
On définit le repère $\left(B;\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BA}\right)$.



1. Donner les coordonnées de A, B, C, D, puis déterminer par le calcul les coordonnées de I et J.

Solution: $B(0;0;0)$, $C(1;0;0)$, $D(0;1;0)$ et $A(0;0;1)$.
$I\left(\dfrac{0+1}{2};\dfrac{0+0}{2};\dfrac{0+0}{2}\right)$ donc $I\left(\frac{1}{2};0;0\right)$
Posons J de coordonnées $(x;y;z)$.
On a $\overrightarrow{AJ}\,(x;y;z-1)$ et $\overrightarrow{AD}\,(0;1;-1)$.
$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{3} \\ z-1 = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow J(0;\frac{1}{3};\frac{2}{3})$.

2. Déterminer une représentation paramétrique du plan (BCD).

Solution: (BCD) est le plan d'origine $B(0;0;0)$, de plus $\overrightarrow{BC}(1;0;0)$ et $\overrightarrow{BD}(0;1;0)$ ne sont pas colinéaires, ils dirigent donc le plan.
$M(x;y;z) \in (BCD) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = t\overrightarrow{BC} + t'\overrightarrow{BD}$, avec t, t' réels
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t' \\ z = 0 \end{cases}$

Exercice 2 :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ un repère. Dans ce repère, on définit les points $A(3;-2;1)$ et $B(-1;2;-1)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de (AB).

Solution: $M(x;y;z) \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$, avec $t \in \mathbb{R}$
$\begin{cases} x-3 = -4t \\ y+2 = 4t \\ z-1 = -2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3-4t \\ y = -2+4t \\ z = 1-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

2. Soit d de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-3t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. A est-il sur cette droite ?

Solution: Résolvons $\begin{cases} 3 = 2+t \\ -2 = 1-3t \\ 1 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$. A appartient donc à d avec $t = 1$.

3. On définit d' : $\begin{cases} x = -t \\ y = 1+t \\ z = 3-t \end{cases}$. Étudier les positions des droites d' et (AB). Donner s'il existe le point d'intersection des droites.

Solution: Un vecteur directeur de d' est $u(-1;1;-1)$ qui n'est pas colinéaire avec $\overrightarrow{AB}$. Les droites ne sont donc pas parallèles.
$M \in (AB) \cap d' \Leftrightarrow \begin{cases} 3-4t = -t' \\ -2+4t = 1+t' \\ 1-2t = 3-t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 4t-3 \\ -2+4t-4t+3 = 1 \\ 1-2t-3+4t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} t' = 7 \\ 1 = 1 \\ t = \frac{5}{2} \end{cases}$.
Les droites sont sécantes au point M de coordonnées $(-7;8;-4)$.