Exercice 1 :

Écrire les nombres A, B et C en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$

1. $A = \ln\left(\dfrac{9\times 5^2}{12}\right)$
2. $B = \ln\left(\dfrac{200}{27}\right)$
3. $C = \ln\left(\dfrac{\sqrt{20}}{\mathrm{e}}\right)$

Solution: $A = \ln\left(\dfrac{9\times 5^2}{12}\right) = 2\ln(3)+2\ln(5)-2\ln(2)-\ln(3) = -2\ln(2)+\ln(3)+2\ln(5)$. $B = \ln(200)-\ln(27) = 2\ln(2)+2\ln(5)-2\ln(3)$ $C = \frac{1}{2}\ln(20)-\ln(\mathrm{e}) = \ln(2)+\frac{1}{2}\ln(5)-1$

Exercice 2 :

Déterminer les limites en 0 et $+\infty$ des fonctions f et g définies par :

1. $f(x) = \ln(x)+x$
2. $g(x) = \ln(x)-x$

Solution:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
   $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$
2. De même, on a $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$

   Pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{1}{x}\left(\dfrac{\ln(x)}{x}-1\right)$, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x)}{x}-1\right) = -1$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = +\infty$, on a par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ et pour $x\neq 0$

Exercice 3 :

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln(2x-3) = -5$
2. $\mathrm{e}^{2x+3} = 7$

Solution:

1. $\ln(2x-3) = 5 \Leftrightarrow 2x-4 = \mathrm{e}^{-5} \Leftrightarrow 2x = \mathrm{e}^{-5}+4 \Leftrightarrow x = \dfrac{\mathrm{e}^{-5}+4}{2}$
2. $\mathrm{e}^{2x+3} = 7 \Leftrightarrow 2x+3 = \ln(7) \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(7)-3}{2}$

Exercice 4 :

Pour chaque fonction, donner son ensemble de définition, de dérivation puis calculer sa dérivée

1. $f(x) = x\ln(x)+2$
2. $g(x) = \ln(x^2+3)$

Solution:

1. f est définie et dérivable sur $I =]0;+\infty[$ comme produit de fonctions définies et dérivable sur cet intervalle.
   Pour $x\in I$, on pose $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(x)$, on a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$.
   Donc $f'(x) = \ln(x) + x\times\dfrac{1}{x} = \ln(x)+1$
2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2+3>0$. g est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de la fonction ln avec une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On pose $u(x) = x^2+3$, on a donc $u'(x) = 2x$ donc $g'(x) = \dfrac{2x}{x^2+3}$.