Exercice 1 :

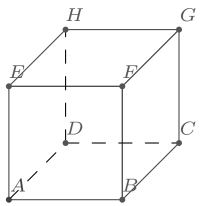
Pourquoi l'appelle-t-on le produit scalaire ?

Solution: Car c'est un produit qui a deux vecteurs associe un scalaire,c'est-à-dire un nombre, ici un réel mais ça peut aussi être un complexe.

Exercice 2 :

La figure ci-contre est un cube tel que $AB = 3$.

1. Déterminer de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG}$ (on demande 2 méthodes différentes).
2. En déduire la mesure de l'ange $\widehat{EAH}$ en degré.



Solution:

1. On remarque d'abord que $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$. Le projeté orthogonale de H sur (AE) est E, on a donc $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG} = AE^2 = 9$.
   On peut décomposer $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AE} \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH}\right) = AE^2 + \overrightarrow{AE} \cdot DH = AE^2 = 9$ car $(AE) \perp (DH)$.
2. On sait que $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AH} = AE \times AH \times \cos\left(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AH}\right)$. Par Pythagore, on sait que $AH^2 = 18$ donc $\cos\left(\widehat{EAH}\right) = \dfrac{3}{\sqrt{18}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On en déduit que $\cos\left(\widehat{EAH}\right) = 45^\circ$.

Exercice 3 :

Soit $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $x + 2y - 4z + 2 = 0$.
Donner un point et un vecteur normal à ce plan.

Solution: Un vecteur normal est $\vec{n}\,(1; 2; -4)$. Un point est $A(0; -1; 0)$

Exercice 4 :

Soient $A(-1; 2; 0)$ et $\vec{n}(1; 1; -1)$
Déterminer un équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ contenant le point A dont $\vec{n}$ est un vecteur normal.

Solution: Soit $M(x; y; z)$ un point du plan.
$M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x + 1) + (y - 2) - z = 0 \Leftrightarrow x + y - z - 1 = 0$. Une équation du plan est $x + y - z - 1 = 0$.

Exercice 5 :

Soient $\vec{u}(2; 3; 6)$ et $\vec{v}(3; 2; 3)$ deux vecteurs du plan. Déterminer un vecteur normal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Solution: Soit $\vec{n}(a; b; c)$ un vecteur normal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a donc : $\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} 2a + 3b + 6c = 0 \\ 3a + 2b + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b + 6c = 0 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 12a + 6c = 0 \\ b = -4a \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} c = \frac{5}{3}a \\ b = -4a \end{cases}$. On fixe $a = 1$, un vecteur normal est $\vec{n}(1; -4; \frac{5}{3})$