Exercice 1 :

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par $f(x) = ax$ sur $[0;2]$ et nulle ailleurs, avec $a \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.

Solution:
Pour tout réel a, f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
$\displaystyle\int_0^2 f(x)dx = \left[\frac{a}{2}x^2\right]_0^2 = 2a.$
Pour que f soit une densité, il faut que $2a = 1$ donc $a = \frac{1}{2}$.
La fonction $f(x) = \frac{1}{2}x$ est postive sur $[0;2]$ et nulle ailleurs. Donc f est bien une densité.

2. Soit X la variable aléatoire à valeurs dans$[0;2]$ de densité f, déterminer

a. $P(X > 1)$ b. $E(X)$

Solution:
a. $P(X > 1) = \int_1^2 f(x)dx = \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
b. $E(X) = \int_0^2 xf(x)dx = \left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^2 = \frac{2}{3}$.

Exercice 2 :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[1;3]$

1. Quelle est sa densité ?

Solution: Sa densité est la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, \text{ si } x \in [1;3] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

2. Déterminer $P(X > 2)$

Solution: $P(X > 2) = \dfrac{3-2}{3-1} = \frac{1}{2}$.

3. Que vaut $E(X)$?

Solution: $E(X) = \frac{3+1}{2} = 2$.

Exercice 3 :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre $0,15$.

1. Quelle est sa densité ?

Solution: Sa densité est la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 0 \text{si } x < 0 \\ 0,15\mathrm{e}^{-0,15x} \text{sinon} \end{cases}$

2. Déterminer $P(X > 2)$

Solution: $P(X > 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - 1 + \mathrm{e}^{-0,15\times 2} = \mathrm{e}^{-0,3}$

3. Déterminer $P_{(X>1)}(X > 3)$

Solution: $P_{(X>1)}(X > 3) = P(X > 2) = \mathrm{e}^{-0,3}$

4. Que vaut $E(X)$?

Solution: $E(X) = \dfrac{1}{0,15} = \dfrac{20}{3}$

Exercice 4 :

La loi exponentielle vérifie la propriété dite **durée de vie sans vieillissement**.

1. Expliquer (mathématiquement) cette propriété.

Solution: Pour tous réels t et h positifs. $P_{X>t}(X > t + h) = P(X > h)$.

2. Démontrer celle-ci.

Solution: Voir le cours.