Exercice 1 :

Pour les suites suivantes, conjecturer puis démontrer leur nature. Le cas échéant, on donnera la raison et le premier terme

1. $u_n = 4n + 3$
2. $v_n = 3n^2 + 5$
3. $w_n = \frac{3^{2n+1}}{5^{2n+3}}$

Solution: u semble être une suite arithmétique.
$u_{n+1} = 4(n+1) + 3 = 4n + 4 + 3 = u_n + 4$. u est donc arithmétique de raison 4.
v ne semble être ni arithmétique, ni géométrique.
$v_0 = 5$, $v_1 = 8$ et $v_2 = 17$. $v_2 - v_1 = 9 \neq 3 = v_1 - v_0$ donc v n'est pas arithmétique.
$v_1/v_0 = \frac{8}{5} \neq \frac{17}{8} = v_2/v_1$ donc v n'est pas géométrique.
w semble être géométrique.
$w_{n+1} = \frac{3^{2(n+1)+3}}{5^{2(n+1)+1}} = \frac{3^{2n+3} \times 3^2}{5^{2n+1} \times 5^2} = \frac{9}{25} w_n$. w est une suite géométrique de raison $\frac{9}{25}$

Exercice 2 :

1. On sait qu'une suite u est arithmétique de raison 2 et telle que $u_3 = 5$. En déduire u_0.

   Solution: $u_n = u_3 + 2(n-3) = 5 + 2n - 6 = 2n - 1$, donc $u_0 = -1$

2. On sait qu'une suite v est géométrique telle que $v_3 = 9$ et $v_5 = 81$ en déduire v_0

   Solution:
   $\frac{v_5}{v_3} = 9 = 3^2$, la raison est donc 3 ou -3. Donc $v_0 = v_3 \times \frac{1}{3^3} = \frac{1}{3}$ ou $v_0 = -\frac{1}{3}$.

3. On sait qu'une suite w est arithmétique de raison -2 et telle que $w_0 = 10$. Calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{9} w_i$

   Solution: $w_9 = 10 + -2 \times 9 = -8$ donc $\sum_i = 0^9 w_i = 10 \times \frac{10-8}{2} = 10$

Exercice 3 :

Soit u la suite définie pour tout entier n par $u_{n+1} = 2u_n - 3$ et $u_0 = 1$.

1. Calculer u_1 et u_2.

   Solution: $u_1 = -1$ et $u_2 = -5$

2. On pose v la suite définie par $v_n = u_n - 3$. Démontrer que v est géométrique.

   Solution: $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = 2u_n - 3 - 3 = 2u_n - 6 = 2(u_n - 3) = 2v_n$
   v est donc géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = -2$ donc $v_n = -2 \times 2^n$

3. Exprimer v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.

   Solution:
   $u_n = v_n + 3 = -2 \times 2^n + 3$.

4. Déterminer en fonction de n $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} v_i$, en déduire $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i$.

   Solution:
   $\sum_{i=0}^{n} v_n = v_0 \times \dfrac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = -2 \times \left(2^{n+1} - 1\right)$ et
   $\sum_{i=0}^{n} u_n = \sum_{i=0}^{n} (v_n + 3) = \sum_{i=0}^{n} v_n + \sum_{i=0}^{n} 3 = -2 \times \left(2^{n+1} - 1\right) + 3(n+1)$