Exercice 1 :

Déterminer la limite des suites ci-dessous :

1. $u_n = 2n^2 - 3n + 2$
2. $v_n = \dfrac{n^3 + n - 3}{3n^2 - 1}$

Solution:

1. Pour $n \neq 0$, $u_n = n^2(2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2})$.
   Or par sommes de limites, $2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}$ tend vers 2. Donc par produit de limites, u_n tend vers $+\infty$.
2. Pour $n \neq 0$, $v_n = \dfrac{n^3\left(1 + \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^3}\right)}{n^2\left(3 - \frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{n\left(1 + \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^3}\right)}{3 - \frac{1}{n^2}}$
   Or par sommes de limite $1 + \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^3}$ tend vers 1 et n tend vers $+\infty$, donc par produit de limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} n\left(1 + \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^3}\right) = +\infty$.
   De plus $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(3 - \frac{1}{n^2}\right) = 3$ par somme donc quotient, $\lim v_n = +\infty$.

Exercice 2 :

Soit u la suite définie par $u_{n+1} = 3u_n + 2$ et $u_0 = 0$, montrer par récurrence que pour tout n, $u_n > -1$.

Solution: Pour tout entier n, on définit $P(n)$ la propriété : « $u_n > -1$. Démontrons par récurrence cette propriété.

Initialisation Pour $n = 0$.

$u_0 = 0 > -1$, donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons que pour un entier n, $P(n)$ est vraie, montrons alors que $P(n+1)$ est vraie.

$P(n+1)$ s'écrit $u_{n+1} > -1$, or $u_{n+1} = 3u_n + 2$.

Selon l'hypothèse de récurrence, $u_n > -1$ donc $3u_n + 2 > -3 + 2 = -1$ donc $u_{n+1} > -1$.

$P(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion On a l'initialisation et l'hérédité, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier n.

TS 8 Interrogation 2A : Correction 15 septembre 2015

Exercice 1 :

Déterminer la limite des suites ci-dessous :

1. $u_n = 2n^2 - 3n + 2$
2. $v_n = \dfrac{n^3 + n - 3}{3n^2 - 1}$

Solution:

1. Pour $n \neq 0$, $u_n = n^2(2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2})$.
   Or par sommes de limites, $2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}$ tend vers 2. Donc par produit de limites, u_n tend vers $+\infty$.
2. Pour $n \neq 0$, $v_n = \dfrac{n^3\left(1 + \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^3}\right)}{n^2\left(3 - \frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{n\left(1 + \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^3}\right)}{3 - \frac{1}{n^2}}$
   Or par sommes de limite $1 + \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^3}$ tend vers 1 et n tend vers $+\infty$, donc par produit de limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} n\left(1 + \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^3}\right) = +\infty$.
   De plus $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(3 - \frac{1}{n^2}\right) = 3$ par somme donc quotient, $\lim v_n = +\infty$.

Exercice 2 :

Soit u la suite définie par $u_{n+1} = 3u_n + 2$ et $u_0 = 0$, montrer par récurrence que pour tout n, $u_n > -1$.

Solution: Pour tout entier n, on définit $P(n)$ la propriété : « $u_n > -1$. Démontrons par récurrence cette propriété.

Initialisation Pour $n = 0$.

$u_0 = 0 > -1$, donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons que pour un entier n, $P(n)$ est vraie, montrons alors que $P(n+1)$ est vraie.

$P(n+1)$ s'écrit $u_{n+1} > -1$, or $u_{n+1} = 3u_n + 2$.

Selon l'hypothèse de récurrence, $u_n > -1$ donc $3u_n + 2 > -3 + 2 = -1$ donc $u_{n+1} > -1$.

$P(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion On a l'initialisation et l'hérédité, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier n.