Exercice 1 :

1. Déterminer les limites en 2 de la fonction $f(x) = \dfrac{x-3}{4-x^2}$:
2. En donner une interprétation graphique.

Solution:

1. $\lim\limits_{x\to 2}(3x+5) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 2}(4-x^2) = 0$.
   Lorsque $x > 2$, $4 - x^2 < 0$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = -\infty$
   Sinon, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$
2. On conclut que la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe représentant f.

Exercice 2 :

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de $h(x) = \dfrac{x^2 - \cos(x)}{x^2 - 4}$
2. En donner une interprétation graphique.

Solution:

1. Pour tout réel $x > 2$ $-1 < \cos(x) < 1$ donc $x^2 - 1 < x^2 - \cos(x) < x^2 + 1$ et $\dfrac{x^2-1}{x^2-4} < \dfrac{x^2-\cos(x)}{x^2-4} < \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$ (car $x^2 - 4 > 0$)
   Pour tout $x > 2$, $\dfrac{x^2-1}{x^2-4} = \dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}}$ et par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}} = 1$. De même $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-4} = 1$.
   Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$
2. On en déduit que la droite d'équation $y = 1$ est un asymptote horizontale.

Exercice 3 :

Déterminer la limite en $-\infty$ de $g(x) = \sqrt{2x^2+3}$

Solution: $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2 + 3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2+3} = +\infty$

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.
Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution sur $[0; +\infty[$

Solution: f est dérivable comme fonction polynôme. $f'(x) = 3x^2 - 6x$. $f'(x) = 0$ admet 2 solutions 0 et 2. Le coefficient dominant est positif donc f est strictement décroissante sur $[0; 2]$ et strictement croissante sur $[2; +\infty[$.
f est continue et strictement décroissante sur $[0; 2]$ et $f(0) = 2$ donc le maximum est 2. $f(x) = 3$ n'admet donc pas de solution sur $[0; 2]$.
f est continue, strictement croissante sur $[2\infty]$ de plus $f(2) = -2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution sur $[2; +\infty[$