Exercice 1 :

Donner les valeurs exactes de :

1. $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$
2. $\sin\left(\frac{35\pi}{2}\right)$
3. $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Solution:

1. $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$
2. $\sin\left(\frac{35\pi}{2}\right) = -1$
3. $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Exercice 2 :

Résoudre les équations suivantes sur $[0; 2\pi]$:

1. $\sin(x) = -\frac{1}{2}$
2. $\cos(3x+\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution:

1. $S = \left\{\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$
2. $S = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{11\pi}{12}; \frac{19\pi}{12}; \frac{7\pi}{4}; \frac{5\pi}{12}; \frac{13\pi}{12}; \frac{21\pi}{12}\right\}$

Exercice 3 :

Dériver sur $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sin(-3x+5)$
2. $g(x) = \sqrt{\cos(x)+2}$

Solution:

1. $f'(x) = -3\cos(-3x+5)$
2. $g'(x) = -\dfrac{\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)+2}}$

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) + \sin^2(x)$

1. Montrer que f est π-périodique.
2. Étudier la parité de f
3. Sur quel intervalle peut-on restreindre l'étude de f ?
4. Montrer que $f'(x) = -2\sin(x)\cos(x)$
5. En déduire le tableau de variations de f sur $[0; \frac{\pi}{2}]$

Solution:

1. $f(x+\pi) = \cos(2x+2\pi) + \sin^2(x+\pi) = \cos(2x) + (-\sin(x))^2 = \cos(2x) + \sin^2(x)$
2. $f(-x) = \cos(-2x) + \sin^2(-x) = \cos(2x) + (-\sin(x))^2 = f(x)$.
   f est paire
3. Comme f est π-périodique, on peut restreindre l'étude à $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Comme f est paire, on peut restreindre l'étude à $[0; \frac{\pi}{2}]$.
4. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions trigonométriques.
   $f'(x) = -2\sin(2x) + 2\cos(x)\sin(x) = -4\sin(x)\cos(x) + 2\cos(x)\sin(x) = -2\sin(x)\cos(x)$
5. sin et cos sont positives sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ donc $f'(x) \leqslant 0$ sur cet intervalle.
   f est donc strictement décroissante (faire un tableau)