

Exercice 1 :

Dans un restaurant on propose trois menus : A, B et C

Le menu A est composé d'une entrée et d'un plat, le menu B est composé d'un plat et d'un dessert et le menu C est composé d'une entrée, d'un plat et d'un dessert.

Le client peut-ensuite prendre s'il le souhaite un verre de vin.

On a remarqué que la moitié des clients prend le menu A, $\frac{3}{10}$ le menu B et les autres le menu C.

— Parmi les clients qui prennent le menu A, $\frac{2}{3}$ prennent aussi un verre de vin.

— Parmi les clients qui prennent le menu B, $\frac{1}{3}$ prennent aussi un verre de vin.

— Sur l'ensemble des clients, 10% prennent le menu C et un verre de vin.

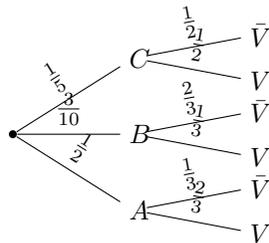
On choisit au hasard un client du restaurant.

On appelle A : « choisir un client qui a pris le menu A », B : « choisir un client qui a pris le menu B », C : « choisir un client qui a pris le menu C » et V « choisir un client qui a pris un verre de vin ».

1. Donner $P(C)$ et $P(C \cap V)$. En déduire $P_C(V)$, puis compléter l'arbre de probabilité ci-joint.

Solution:

$$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = \frac{1}{5}. \quad P(C \cap V) = \frac{1}{10}, \text{ donc } P_C(V) = \frac{P(C \cap V)}{P(C)} = \frac{1}{2}$$



2. Calculer $P(A \cap V)$.

Solution: $P(A \cap V) = P(A) \times P_A(V) = \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$

3. Montrer que $P(V) = \frac{8}{15}$

Solution:

A, B et C forment un système d'événements complet, donc d'après la formule des probabilités totales : $P(V) = P(A) \times P_A(V) + P(B) \times P_B(V) + P(C) \times P_C(V)$

$$P(V) = \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{15} + \frac{2}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

4. On choisit une personne ayant pris un verre de vin. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi le menu B ?

Solution:

$$P_V(B) = \frac{P(B \cap V)}{P(V)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{4}$$

La probabilité qu'une personne ayant pris un verre de vin ait choisi le menu B est $\frac{1}{4}$.

On imagine que le nombre de clients de ce restaurant est très important. On interroge au hasard 10 clients. Soit X le nombre de clients qui ont choisi de prendre du vin.

5. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

Solution:

Interroger un client est une épreuve de Bernoulli de succès : « Le client prend du vin » de probabilité $\frac{2}{5}$. Interroger 10 clients correspond à la répétition de 10 épreuves identiques et indépendantes. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit donc la loi Binomiale de paramètres 10 et $\frac{2}{5}$.

6. Donner la formule de $P(X = k)$ puis déterminer $P(X = 2)$ et $P(X \leq 8)$.

Solution: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ donc $P(X = 2) = \binom{10}{2} \times (2/5)^2 \times (3/5)^8 \approx 0,029$

$$P(X \leq 8) = 1 - P(X = 9) - P(X = 10) \approx 0,982$$

7. Calculer $E(X)$.

Solution:

$$E(X) = 10 \times \frac{2}{5} = \frac{40}{5} = 8$$