Baccalauréat blanc 2016

MATHÉMATIQUES
série S

OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Épreuve du Vendredi 19 février 2016

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (4 points)

Partie A

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^3 - \left(2 + i\sqrt{2}\right) z^2 + 2\left(1 + i\sqrt{2}\right) z - 2i\sqrt{2}$.

1) Montrer que le nombre complexe $z_0 = i\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.

2) a) Déterminer des réels a et b tels que $P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b)$.

   b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}; \vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.
On considère les points A, B et J d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + i, \quad z_B = 1 - i \text{ et } z_J = i\sqrt{2}$$

1) Placer les points A et B sur l'annexe et compléter la figure au fur et mesure de l'exercice.

2) a) Montrer que les points A, B et J appartiennent à un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.

   b) Placer le point J.

3) Soit f la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M$'$ d'affixe z' tel que $z' = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) z$.

   a) Calculer l'affixe z_D du point D, image de J par la transformation f. Placer le point D.

   b) Calculer l'affixe z du point ayant pour image C d'affixe $z_C = -1 - i$. Écrire z sous forme algébrique.

4) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

Exercice 2 (5 points)

SOABCD est une pyramide de sommet S. Sa base est la face OABCD.
E est un point appartenant à [OC], F est un point appartenant à la base de la pyramide.
P est le point de [SC] tel que (EP) et (OS) sont parallèles.
On fera les constructions sur la feuille donnée en annexe à rendre avec la copie.

Partie A

On souhaite construire la section de la pyramide SOABCD par le plan(EFP). **NE PAS** utiliser de rouge.

1) Justifier que les plans (EFP) et (OAD) sont sécants et construire leur intersection.

2) On admet que les plans (EFP) et (SOA) sont sécants. On nomme d_1 leur intersection.

   a) Démontrer que d_1 est parallèle à (SO). Construire d_1.

   b) Justifier que d_1 et (SA) sont sécantes. Construire leur point commun Q.

3) De même, d_2 est l'intersection de (EFP) et (SOB). On admet que d_2 est parallèle à (SO). Construire d_2.

4) Terminer la construction de la section en faisant apparaitre les traits de construction **SANS** utiliser de rouge.

Partie B

L'espace est muni du repère $(\mathrm{O}; \overrightarrow{\mathrm{OA}}; \overrightarrow{\mathrm{OD}}; \overrightarrow{\mathrm{OS}})$. Dans ce repère, on veut déterminer les coordonnées de certains sommets de la section de la partie A.
On a : B $\left(\frac{3}{2}; 1; 0\right)$, C $\left(1; \frac{3}{2}; 0\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, F $\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}; 0\right)$ et M $\left(\frac{7}{9}; 0; 0\right)$ et W $\left(\frac{2}{3}; 1; \frac{1}{3}\right)$.

1) Déterminer les coordonnées de E.

2) a) Donner une représentation paramétrique de (SC) et vérifier que W appartient à (SC).

   b) Prouver que (EW) est parallèle à (SO).

   c) En déduire que W et P sont confondus.

3) Montrer que E, F et M sont alignés. Prouver que M est un sommet de la section.

4) (EF) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = \frac{3}{4} + t \\ y = \frac{1}{4} - 9t \quad , t \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$

(CD) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = k \\ y = 1 + \frac{k}{2} \quad , k \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$

Déterminer les coordonnées du point N commun à (EF) et (CD).

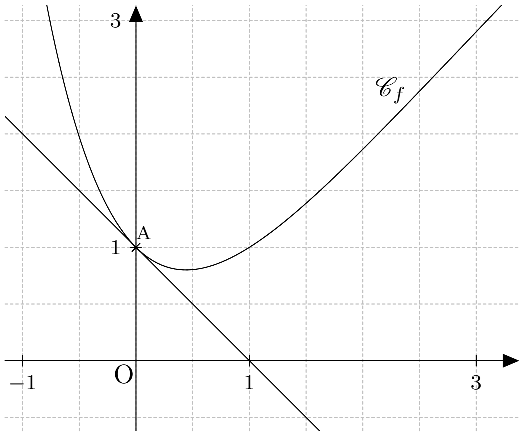
5) Indiquer une démarche qui permettrait d'obtenir les coordonnées de l'un de deux derniers sommets de la section sans faire les calculs.

Exercice 3 **(6 points)**

Partie A : Recherche d'une fonction

On considère une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + (ax + b)\mathrm{e}^{-x}$ où a et b désignent deux réels.
Sur le graphique ci-contre figurent la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ ainsi que la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

1) En utilisant le graphique, lire $f(0)$ et $f'(0)$.
2) Déterminer les valeurs de a et de b.



Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire g

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 + (x - 2)\mathrm{e}^{-x}$.

1) Vérifier que si $x \geqslant 3$, alors $g(x) \geqslant 1$.
2) a) Calculer $g'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction g.
   b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0~;~3]$.
   Déterminer une valeur décimale approchée par excès de α à 10^{-2} près.
   c) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie C : Étude de la fonction f

On admet que la fonction f de la partie A est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + (1 - x)\mathrm{e}^{-x}$ et que $f' = g$.

1) Donner le sens de variation de f sans calculer les limites et les images particulières.
2) **Restitution organisée de connaissances :**
   On admet que pour tout réel positif x, $\mathrm{e}^x \geqslant \dfrac{x^2}{2}$ et que pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.
   Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$. Puis en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^{-x}$.
3) Calculer la limite de f en $+\infty$.
4) Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = x(1 - \mathrm{e}^{-x}) + \mathrm{e}^{-x}$. En déduire la limite de f en $-\infty$.
5) *Dans cette question, toute trace de recherche sera prise en compte.*
   Existe-t-il des réels x_0 tels que la tangente $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x_0 passe par l'origine O du repère ?

Exercice 4 (5 points)

Au cours d'une séance, un joueur de tennis s'entraine à faire des services.
Pour tout entier naturel non nul n, on note R_n l'événement « le joueur réussit le n-ième service » et $\overline{R_n}$ l'événement contraire.
De plus :

- La probabilité qu'il réussisse le premier service est égale à 0,6.
- Si le joueur réussit un service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant est de 0,8.
- Si le joueur ne réussit pas un service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant est de 0,6.

On note p_n la probabilité de l'événement R_n.
On a ainsi : $p_1 = 0,6$ et pour tout entier naturel non nul n, $0 \leqslant p_n < 1$.

1) a) Déterminer la valeur de p_2 à l'aide d'un arbre de probabilité.

   b) Sachant que le joueur a réussi le 2^{e} service, déterminer la probabilité qu'il ait raté son premier service.

2) Compléter l'arbre de probabilité donné en annexe.

3) a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,6$.

   b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,75$.

   c) En déduire que la suite (u_n) converge.

4) a) Soit (u_n) la suite définie par pour tout entier naturel n non nul, $u_n = p_n - 0,75$.
   Montrer que (u_n) est géométrique de raison 0,2.

   b) Exprimer u_n en fonction de n, puis p_n en fonction de n.

   c) En déduire la limite de p_n.

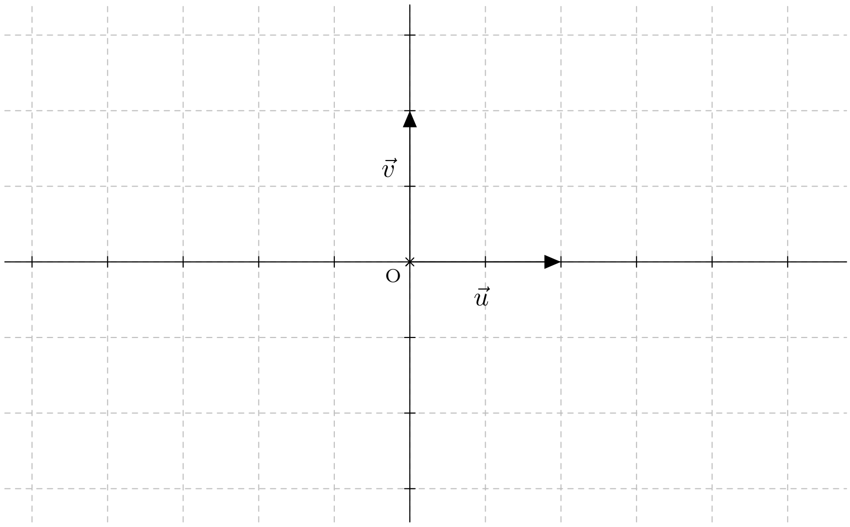
5) On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES :	K et J sont des entiers naturels, P est un nombre réel.
INITIALISATION :	P prend la valeur 0,6.
	J prend la valeur 1.
ENTRÉE :	Saisir la valeur de K
TRAITEMENT :	Tant que $\mathrm{P} < 0,75 - 10^{-\mathrm{K}}$
	P prend la valeur $0,2 \times \mathrm{P} + 0,6$
	J prend la valeur J + 1
	Fin TantQue
SORTIE :	Afficher J

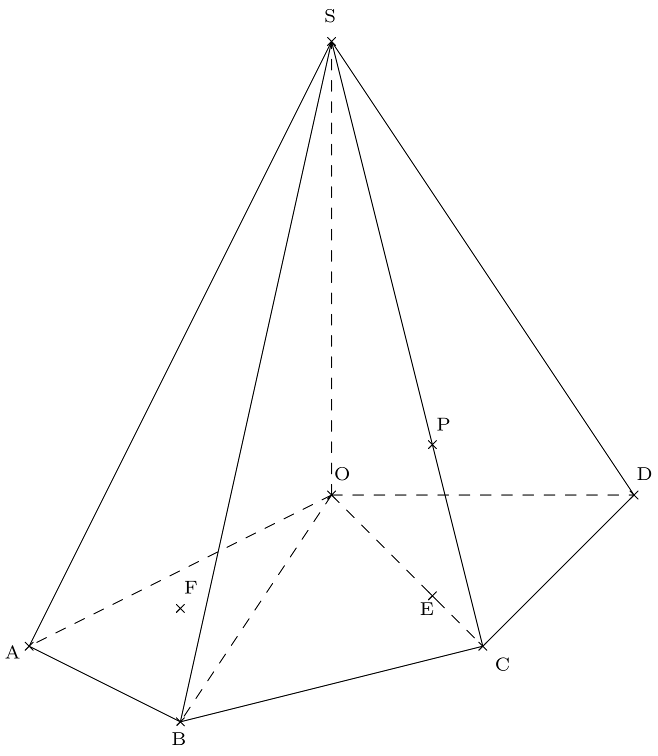
À quoi correspond l'affichage final J ?
Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 1



Exercice 2



Exercice 4