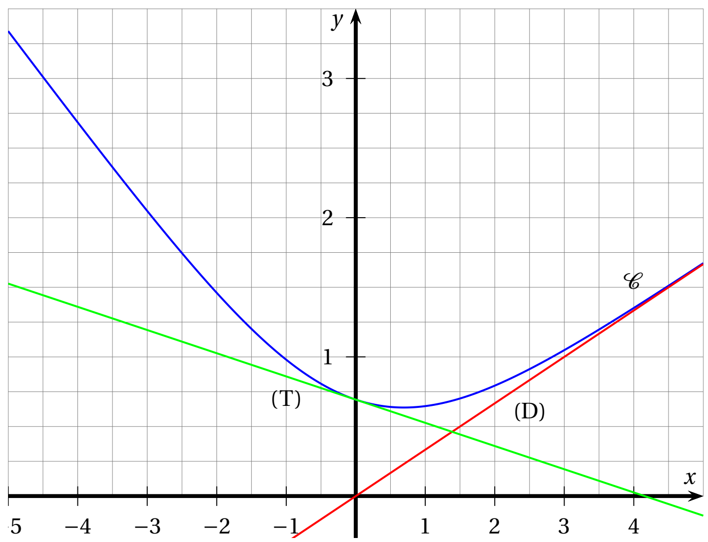
Exercice 1 : Vrai/Faux

1. Prélever un jeton et noter sa couleur est une épreuve de Bernoulli à deux issues de succès « obtenir la couleur blanche »de probabilité $\frac{3}{10}$.
   On observe la répétition de 10 épreuves identiques et indépendantes. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès. X suit la loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{3}{10}$.
   La probabilité d'obtenir au moins 2 jetons blancs est $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^{10} - 10\frac{3}{10} \times \left(\frac{7}{10}\right)^{10} \approx 0{,}850$ à 0,001 près.
   La proposition est donc $\boxed{\text{fausse}}$.
2. Un vecteur directeur de $\mathscr{D}_1$ est $\vec{u}\,(1;2;3)$ et celui de $\mathscr{D}_2$ est $\vec{v}\,(1;1;-1)$. Les vecteurs ne sont pas colinéaires. Les droites ne sont donc pas parallèles.
   Cherchons un point d'intersection.
   $$\begin{cases} t+1 = k+1 \\ 2t-1 = k+3 \\ 3t+2 = -k+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = k \\ 2t = k+4 \\ 3t = -k+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = k \\ t = 4 \\ 4t = 2 \end{cases}.$$
   Les droite ne sont donc pas sécantes. La proposition est donc $\boxed{\text{fausse}}$.
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)dx = \left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}(1-0) = 0{,}5$ La proposition est donc $\boxed{\text{vraie}}$.
4. **Attention à ne pas confondre indépendante et incompatibilité**.
   Il y a deux façons d'obtenir A. $(1;2)$ et $(2;1)$. $P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.
   Il y a 6 façons d'obtenir B. $(1;1),\ldots,(6;6)$. $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
   Il n'est pas possible d'obtenir $A \cap B$. Donc $P(A \cap B) = 0$.
   On a donc $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$. La proposition est donc $\boxed{\text{fausse}}$.

Exercice 2 : Étude d'une fonction ln



Partie A

1. (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + e^{-x} = 1$ et $\ln(1) = 0$ par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$. Par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.
   (b) Voir graphique
   (c) $f(x) - \frac{1}{3}x = \ln(1+e^{-x})$. Pour tout réel x, $1 + e^{-x} > 1$ donc $\ln(1+e^{-x}) > 0$. On en déduit que $\boxed{\mathscr{C} \text{ est au-dessus de } D}$.
   (d) Soit x un réel. On a $f(x) = \ln(1+e^{-x}) + \dfrac{1}{3}x = \ln\left(1 + \dfrac{1}{e^x}\right) + \dfrac{1}{3}x = \ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x}\right) + \dfrac{1}{3}x = \ln(e^x+1) - \ln(e^x) + \dfrac{1}{3}x = \ln(e^x+1) - x + \dfrac{1}{3}x$
   soit $f(x) = \ln(e^x+1) - \dfrac{2}{3}x$.
   (e) $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + e^x = 1$. Par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1+e^x) = 0$. Par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$.
2. (a) f est dérivable en tant que composée d'une fonction $x \longmapsto e^x + 1$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$,où la fonction ln est dérivable : cette composée est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction linéaire que l'on y ajoute pour obtenir $f(x)$ étant elle même dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Sa dérivée est :
   $$f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{2}{3} = \frac{3e^x}{3(e^x+1)} - \frac{2(e^x+1)}{3(e^x+1)} = \frac{3e^x - 2(e^x+1)}{3(e^x+1)} = \boxed{\frac{e^x-2}{3(e^x+1)}}.$$
   (b) Le dénominateur de f' est strictement positif, donc f' est du signe de son numérateur, et $e^x - 2 > 0 \Longleftrightarrow x > \ln(2)$. On en déduit donc que la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ \ln 2]$ puis strictement croissante sur $[\ln 2\ ; +\infty[$.

Partie B

1. Le coefficient directeur de T est donné par $f'(0)$. C'est donc
   $f'(0) = \dfrac{e^0 - 2}{3(e^0+1)} = \boxed{\dfrac{-1}{6}}$.
2. Soit x un réel non nul, considérons M et N les deux points de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisses respectives x et $-x$.
   L'ordonnée de M est donc $y_M = f(x) = \ln(e^x+1) - \dfrac{2}{3}x$.
   Pour calculer celle de N, on va utiliser l'autre forme de f : $y_N = f(-x) = \ln\left(1 + e^{-(-x)}\right) + \dfrac{1}{3}(-x) = \ln(e^x+1) - \dfrac{1}{3}x$.
   Le coefficient directeur de (MN) est donc :

$$\frac{y_M-y_N}{x_M-x_N}=\frac{\left[\ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)-\frac{2}{3}x\right]-\left[\ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)-\frac{1}{3}x\right]}{x-(-x)}=\frac{-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x}{2x}=\frac{-\frac{1}{3}x}{2x}=-\frac{1}{6}$$

Les droites (MN) et T ayant le même coefficient directeur, elles sont donc parallèles.

Exercice 3 : Intégrale et algorithme

1. (a) $f(0)=3$ donc l'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées a pour coordonnées $(0;3)$.
   $f(x)=0\Leftrightarrow(x+3)\mathrm{e}^{-x}=0\Leftrightarrow x=-3$ (car $\mathrm{e}^x>0$) donc l'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $(-3;0)$.

   (b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x}=+\infty$ par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty}$.
   Pour $x\neq0$, $f(x)=\frac{x}{\mathrm{e}^x}(1+\frac{3}{x})$. Par croissance comparée $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{1}{X}=0$. Par composition $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}=0$. Par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0}$.
   $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation $y=0$ comme aymptote horizontale.

   (c) Soit u et v définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x+3$ et $v(x)=\mathrm{e}^{-x}$, on a $u'(x)=1$ et $v'(x)=-\mathrm{e}^{-x}$. Donc $f'(x)=\mathrm{e}^{-x}-(x+3)\mathrm{e}^{-x}=-(x+2)\mathrm{e}^{-x}$.
   $\mathrm{e}^{-x}>0$ pour tout réel x. $-x-2>0$ pour $x>-2$. Donc $f'(x)<0$ pour $x>-2$ et $f'(x)\geqslant0$ sinon.
   Donc
   $\boxed{f\text{ est strictement décroissante sur }]-2;+\infty[\text{ et strictement croissante sur }]-\infty;-2[}$

2. (a)

k		0	1	2	3	4
$f(\frac{k}{5})$		3	2,82	2,279	1,976	1,707
S	0	0,6	1,124	1,58	1,975	2,316

   On modifie la première ligne par : Pour k variant de 0 à $n-1$
   Et la seconde par : Affecter à S la valeur $S+\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$.

3. (a) L'aire $\mathscr{A}$ est donnée par $\displaystyle\int_0^1(x-3)\mathrm{e}^{-x}dx=\left[(-x-4)\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1=\boxed{-5\mathrm{e}^{-1}+4}$.

   (b) $\mathscr{A}-2{,}316\approx-0{,}155$. L'erreur est donc de $\boxed{0{,}155}$.

Exercice 4 : Suite de nombres complexes

1. $$\left|\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{16}+\frac{3}{16}}=\sqrt{\frac{12}{16}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\mathrm{i}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{3}{4}\times\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{i}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$$

   Or $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.
   Donc le nombre complexe $\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$ a pour module $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et pour argument $\frac{\pi}{6}$ donc sa forme exponentielle est $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$.

2. (a) $$r_{n+1}=|z_{n+1}|=\left|\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right)z_n\right|=\left|\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right|\times|z_n|=\frac{\sqrt{3}}{2}r_n$$
   Donc la suite (r_n) est géométrique de raison $q=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et de premier terme $r_0=|z_0|=1$.

   (b) La suite (r_n) est géométrique donc, pour tout n, $r_n=r_0\times q^n$, donc $\boxed{r_n=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}$.

   (c) $OA_n=|z_n|=r_n=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$
   (r_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$; or $-1<\frac{\sqrt{3}}{2}<1$ donc la suite (r_n) converge vers 0. $\boxed{\text{La longueur }OA_n\text{ tend donc vers 0 quand }n\text{ tend vers }+\infty}$.

3. (a) À 2π près :
   $\arg\left(\frac{1}{z}\right)=\arg\left(\frac{1}{z}\right)+\arg(z)-\arg(z)=\arg(1)-\arg(z)=-\arg(z)$.
   $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)+\arg\left(\frac{1}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')$.

   (b) $$\frac{z_n-z_{n+1}}{0-z_{n+1}}=\frac{z_n-\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_n}{-\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_n}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i}=\frac{\left(-1+\sqrt{3}i\right)\left(3-\sqrt{3}i\right)}{\sqrt{12}}=\frac{2\sqrt{3}i}{\sqrt{12}}$$
   Donc $\left(\overrightarrow{A_{n+1};O};\overrightarrow{A_{n+1};A_n}\right)=\arg\left(\frac{z_n-z_{n+1}}{0-z_{n+1}}\right)=\frac{\pi}{2}$.
   $\boxed{\text{Donc le triangle est bien rectangle en }A_{n+1}}$.

   (c) A_n est sur l'axe des ordonnées si $\arg(z_n)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $\arg(z_n)=\frac{3\pi}{2}[2\pi]$. C'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que $\frac{n\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $\frac{n\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, ce qui revient à $n=3+12k$ ou $n=9+12k$. A_n appartient donc à l'axe des ordonnées si et seulement si $\boxed{n\in\{3+6k|k\in\mathbb{N}\}}$.

   (d)