Exercice 1 :

Partie A

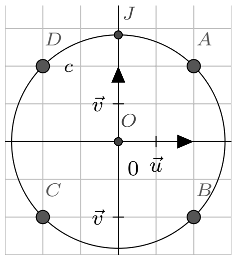
1. $P(i\sqrt{2}) = (i\sqrt{2})^3 - (2+i\sqrt{2}) \times (i\sqrt{2})^2 + 2(1+i\sqrt{2}) \times i\sqrt{2} - 2i\sqrt{2} = -2i\sqrt{2} + 4 + 2i\sqrt{2} + 2i\sqrt{2} - 4 - 2i\sqrt{2} = 0$

2. (a) $P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b) = z^3 + az^2 + bz - i\sqrt{2}z^2 - ai\sqrt{2}z - i\sqrt{2}b$
$= z^3 + (a - i\sqrt{2})z^2 + (b - ai\sqrt{2})z - i\sqrt{2}b.$
$$\begin{cases} a - i\sqrt{2} = -2 - i\sqrt{2} \\ (b - ai\sqrt{2}) = 2(1+i\sqrt{2}) \\ -i\sqrt{2}b = -2i\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \\ b = 2 \end{cases}.$$

   (b) $P(z) = 0 \Leftrightarrow z - i\sqrt{2} = 0$ ou $z^2 - 2z + 2 = 0$.
Résolvons $z^2 - 2z + 2$, le discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4 = -2^2$
Les solutions sont $z_1 = \dfrac{2-2i}{2}$ et $z_2 = \dfrac{2+2i}{2}$

Partie B

1. voir figure ci-contre



2. $|z_A|^2 = 1+1 = 2$, $|z_B|^2 = 1+1 = 2$ et $|z_J|^2 = 2$, les trois points sont donc sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$

3. (a) $z_D = f(z_J) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \times i\sqrt{2} = -1 + i.$

   (b) Résolvons $f(z) = z_C$, c'est-à-dire $z = \dfrac{-1-i}{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)} = -\frac{2}{\sqrt{2}}\dfrac{1+i}{1+i} = -\sqrt{2}$

4. On conjecture que le triangle ABC est isocèle rectangle.
$AB = |z_B - z_A| = |-2i| = 2$ et $BC = |z_C - z_B| = |2| = 2$, donc il est isocèle.
On a de plus $AC = |z_C - z_A| = |-2-2i| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$.
$AB^2 + BC^2 = 4 + 4 = 8 = AC^2$, par la réciproque de Pythagore, on en conclut que ABC est isocèle, rectangle en B.

Exercice 2 :

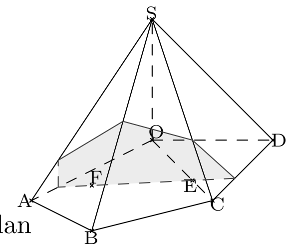
Partie A :

1. E et F appartiennent aux deux plans et les plans ne sont pas confondus. L'intersection de ces plans est donc la droite (EF)

2. (a) Les plans (EFP) et (SOA) sont sécants selon d_1.
(EP) appartient à (EFP), (OS) appartient à (SOA) et $(EP)//(SO)$.
Par le théorème du toit, $d_1//(SO)$.

   (EF) et (OA) sont coplanaires et non parallèles donc sécantes. d_1 est donc la droite parallèle à (SO) qui passe par l'intersection de ces deux droites.

   (b) $d_1//(SO)$ et d_1 coupe (OA), donc d_1 est contenue dans (SOA), les droites d_1 et (AS) sont donc coplanaires.
Elles ne sont pas parallèles ((AS) et (AO) sont sécantes) donc elles sont sécantes.



Partie B

1. $\overrightarrow{OC}\left(1; \frac{3}{2}; 0\right)$ donc $\overrightarrow{OE}\left(\frac{2}{3}; 1; 0\right)$ donc $E\left(\frac{2}{3}; 1; 0\right)$.

2. (a) On a $\overrightarrow{SC}\left(1; \frac{3}{2}; -1\right)$. Soit $M(x;y;z)$ un point du plan

$$M \in (SC) \Leftrightarrow \overrightarrow{SM} = t\overrightarrow{SC},\ t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = \frac{3}{2}t \\ z = -t + 1 \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$$

$$W \in (SC) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} = t \\ 1 = \frac{3}{2}t \\ \frac{1}{3} = -t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} = t \\ t = \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} + 1 \end{cases}.$$ Donc $W \in (SC)$ avec $t = \frac{2}{3}$.

   (b) Un vecteur directeur de (OS) est $\overrightarrow{OS}\,(0;0;1)$. Un vecteur directeur de (EW) est $\overrightarrow{EW}\left((0;0;\frac{1}{3}\right)$. On a $\overrightarrow{OS} = 3\overrightarrow{EW}$ donc les droites (EW) et (OS) sont paralléles.

   (c) W est l'intersection de (EP) et de la droite parallèle a (OS) passant par E, W est donc le point P.

3. $\overrightarrow{EF}\left(\frac{1}{12}; -\frac{3}{4}; 0\right)$ et $\overrightarrow{EM}\left(\frac{1}{9}; -1; 0\right)$ donc $\overrightarrow{EF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{EM}$ et E, F et M sont alignés.
Comme l'ordonnée et la côte de M sont nules, on en déduit que $M \in (OA)$ et donc M est l'intersection de (EF) et (OA) et est donc un sommet de la section.

4. Résolvons l'équation :
$$\begin{cases} \frac{3}{4} + t = k \\ \frac{1}{4} - 9t = 1 + \frac{k}{2} \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} + t = k \\ \frac{1}{4} - 9t = 1 + \dfrac{\frac{3}{4} + t}{2} \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{12}{19} \\ t = \frac{-9}{76} \\ 0 = 0 \end{cases}.$$
On a donc $N\left(\frac{12}{19}; \frac{25}{19}; 0\right)$.

5. Pour conclure, il manque deux sommets de la section. On peut déterminer l'équation paramétrique de la droite d_1 (on connaît un point M et son coefficient directeur $\overrightarrow{OS}$).
Pour le dernier sommet, il faut déterminer l'intersection de (OB) et (EF) puis déterminer l'équation paramétrique de la droite parallèle à (OS) et qui passe par ce point. L'intersection de cette droite avec (SB) est le dernier sommet.

Exercice 3 :

Partie A

1. $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$.

2. $f'(x) = 1-(ax+b)\mathrm{e}^{-x} + a\mathrm{e}^{-x} = 1-(ax+b-a)\mathrm{e}^{-x}$.
   Pour déterminer des valeurs a et b, il suffit de résoudre le système
   $\begin{cases} f(0)=1 \\ f'(0)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ 1-b+a=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=-1 \end{cases}$.

Partie B

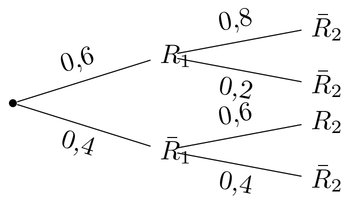
1. $g(x) > 1 \Leftrightarrow (x-2)\mathrm{e}^{-x} > 0 \Leftrightarrow x-2 > 0$ car pour tout réel$x, \mathrm{e}^{-x} > 0 \Leftrightarrow x > 2$.
   Si $x > 3$, on a bien $g(x) > 1$.
2. (a) $g'(x) = -(x-2)\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} = -(x-3)\mathrm{e}^{-x}$.
   $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x-3 < 0$ car pour tout réel$x, \mathrm{e}^{-x} > 0$.
   g est donc strictement croissante sur $]-\infty;3[$ et strictement décroissante sur $]3;+\infty[$.
   (b) Sur $[0;3]$, g est continue, strictement croissante et $g(0) = -1$ et $g(3) = 1+\mathrm{e}^{-1} > 0$, donc $g(0) < 0 < g(3)$. Par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $g(x) = 0$ admet un unique solution sur $[0;3]$.
   Avec la calculatrice, on a $\alpha \approx 0{,}45$.
   (c) g est strictement croissante sur $]-\infty;3[$, g est donc négative sur $]-\infty;\alpha[$ et comme $g(x) > 0$ sur $]3;+\infty[$, g est strictement positive sur $]-\alpha;+\infty[$.

Partie C

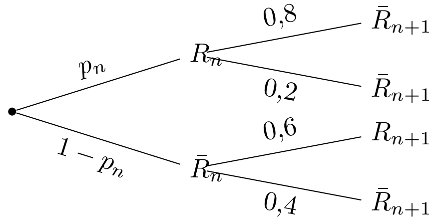
1. En utilisant la partie B, on en déduit que f est strictement décroissante sur $]-\infty;\alpha[$ et strictement croissante sur $]\alpha;+\infty[$.
2. Pour $x > 0$, on a $\frac{\mathrm{e}^x}{x} \geqslant \dfrac{x}{2}$, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$. Par un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$.
   $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{X} = 0$, donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$. En utilisant $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$, on obtient le résultat souhaité.
3. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x+\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x} = +\infty$
4. $x(1-\mathrm{e}^{-x})+\mathrm{e}^{-x} = x-x\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x} = x-(x-1)\mathrm{e}^{-x}$. On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$.
   Par somme $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-\mathrm{e}^{-x}) = -\infty$, donc par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} x(1-\mathrm{e}^{-x}) = +\infty$, À nouveau par somme, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
5. Le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse x_0 est $f'(x_0)$. Si cette tangente passe par l'origine, l'équation de celle-ci sera $y = f'(x_0)x$. la tangente passe par le point de coordonnées $(x_0; f(x_0))$
   Il nous reste à déterminer x tel que $f(x) = f'(x)x$ c'est-à-dire $x+(1-x)\mathrm{e}^{-x} = x+x(x-2)\mathrm{e}^{-x}$, c'est-à-dire $(1+x-x^2)\mathrm{e}^{-x}$, c'est-à-dire $1+x-x^2 = 0$. Le discriminant est 5 et les deux solutions réels sont $\dfrac{-\sqrt{5}+1}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.
   Ces réels correspondent aux x_0 possibles.

Exercice 4 :

1. (a) On modélise la situation par l'arbre ci-contre
   En utilisant cet arbre, on a $p_2 = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) + P(\bar{R}_1) \times P_{\bar{R}_1}(R_2) = 0{,}72$.



   (b) $P_{R_2}(\bar{R}_1) = \dfrac{P(\bar{R}_1 \times R_2)}{P(R_2)} = \dfrac{P_{\bar{R}_1}(R_2) \times P(\bar{R}_1)}{P(R_2)} = \dfrac{0{,}24}{0{,}72} = \frac{1}{3}$
   La probabilité qu'il ait raté son premier service sachant qu'il a réussi le second est $\frac{2}{3}$



2.

3. (a) R_n et $\bar{R}_n$ forment un système complet d'événements.
   Par la formule des probabilités totales : $p_{n+1} = p(R_{n+1}) = p(R_n) \times p_{R_n}(R_{n+1}) + p(\bar{R}_n) \times p_{\bar{R}_n} R_{n+1} = p_n \times 0{,}8 + (1-p_n) \times 0{,}6 = 0{,}2p_n + 0{,}6$.
   (b) Pour tout entier n, on appelle P_n la propriété : « $p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0{,}75$ ».
   Initialisation : Pour $n = 1$, $p_1 = 0{,}6$ et $p_2 = 0{,}72$, on a bien $p_1 \leqslant p_2 \leqslant 0{,}75$. La propriété est vérifiée pour $n = 1$.
   Hérédité : Supposons que la propriété soit vérifiée pour un entier n, montrons qu'elle l'est aussi pour $n+1$.
   P_{n+1} :« $p_{n+1} \leqslant p_{n+2} \leqslant 0{,}75$ ».
   Par hypothèse de récurrence, on sait que $p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0{,}75$ donc $0{,}2p_n \leqslant 0{,}2p_{n+1} \leqslant 0{,}15$ donc $p_{n+1} \leqslant p_{n+2} \leqslant 0{,}15 + 0{,}6 = 0{,}75$.
   On a donc bien P_{n+1}.
   Conclusion : On a initialisation et hérédité, la propriété est donc vérifiée pour tout entier n.
   (c) La suite est croissante et majorée, par le théorème de convergence monotone, la suite converge vers une limite finie.
4. (a) Pour tout entier n, $u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}75 = 0{,}2p_n + 0{,}6 - 0{,}75 = 0{,}2p_n - 0{,}15 = 0{,}2(p_n - 0{,}75) = 0{,}2u_n$. La suite est donc bien géométrique de raison 0,2.
   (b) $u_0 = p_0 - 0{,}75 = -0{,}15$, on a donc $p_n = -0{,}15 \times 0{,}2^{n-1}$ et $u_n = -0{,}15 \times 0{,}2^{n-1} + 0{,}75$.
   (c) $-1 < 0{,}2 < 1$ donc $0{,}2^{n-1}$ tend vers 0 et $-0{,}15 \times 0{,}2^{n-1} + 0{,}75$ tend vers 0,75.
5. J affiche le rang n pour lequel $p_n \geqslant 0{,}75 - 10^{-K}$ pour un K donné en entrée.
   La limite est 0,75, il existera donc un rang n pour lequel cette inégalité sera vérifiée. Donc l'algorithme s'arrêtera.