Durée 2 heures. Le barème est donné à titre indicatif.
Le manque de soin et de clarté dans la rédaction sera pénalisé.

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (1 heure) (10 points)

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points

$$A(5\ ;\ -5\ ;\ 2), B(-1\ ;\ 1\ ;\ 0), C(0\ ;\ 1\ ;\ 2) \quad \text{et } D(6\ ;\ 6\ ;\ -1).$$

1. Déterminer la nature du triangle BCD et calculer son aire.
2. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).
   (b) Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale au plan (BCD) et passant par le point A.
4. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (BCD).
5. Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.
6. On admet que $AB = \sqrt{76}$ et $AC = \sqrt{61}$.
   Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.
7. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $4x + y + 5z - 11 = 0$.
   (a) Donner un vecteur normal à $\mathscr{P}$
   (b) En déduire la position relative de $\mathscr{P}$ et (BCD)
   (c) Déterminer si elle existe la représentation paramétrique de l'intersection de ces deux plans.

Exercice 2 : Fonction ln (1 heure) (10 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 1 + \ln(1 + x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On note D la droite d'équation $y = x$.

Partie A

On suppose connu $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}$, en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$

Partie B

1. (a) Étudier le sens de variation de la fonction f.
   (b) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
   (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-1} g(x)$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
   (c) Étudier le sens de variation de la fonction g, puis dresser le tableau de variations de la fonction g.
   (d) Montrer que sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β, avec α négative et β appartenant à l'intervalle $[2\,;\,3]$.
   (e) À l'aide des questions précédentes, déterminer le signe de $g(x)$. En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite D.

Partie C

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit (u_n) la suite définie pour tout nombre entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= f(u_n) \end{cases}$

Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$