Durée 2 heures. Le barème est donné à titre indicatif.
Le manque de soin et de clarté dans la rédaction sera pénalisé.

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace

1. Nature du triangle BCD : $\begin{cases} BC^2 = (0-(-1))^2+(1-1)^2+(2-0)^2 = 5 \\ CD^2 = (6-0)^2+(6-1)^2+(-1-2)^2 = 70 \\ BD^2 = (6-(-1))^2+(6-1)^2+(-1-0)^2 = 75 \end{cases} \Longrightarrow$
   $BD^2 = BC^2 + CD^2$
   $\boxed{BCD \text{ est rectangle en } C}$
   Son aire est : $\dfrac{BC\times CD}{2} = \dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{70}}{2} = \boxed{\dfrac{5}{2}\sqrt{14}}$.

2. (a) Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD) :
   $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\cdot\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} = 1\times(-2)+0\times3+2\times1 = 0$ et
   $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}6\\5\\-3\end{pmatrix}\cdot\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} = 6\times(-2)+5\times3+(-3)\times1 = 0$
   Comme $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires, $\vec{n}$ étant orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BCD), il en est un vecteur normal.
   (b) Équation cartésienne du plan (BCD) : Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace.
   $M\in(BCD) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\cdot\vec{n} = 0 \Leftrightarrow -2(x+1)+3(y-1)+z = 0$.
   Une équation de (BCD) est $\boxed{-2x+3y+z-5=0}$

3. Représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale au plan (BCD) (donc de vecteur directeur $\vec{n}$) et passant par le point A : $\boxed{\begin{cases} x = 5-2t \\ y = -5+3t \quad \text{avec } t\in\mathbb{R} \\ z = 2+t \end{cases}}$

4. Déterminons les coordonnées du point H :
   $\begin{cases} x = 5-2t \\ y = -5+3t \\ z = 2+t \\ -2x+3y+z-5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5-2t \\ y = -5+3t \\ z = 2+t \\ -2(5-2t)+3(-5+3t)+(2+t)-5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
   $\begin{cases} x = 5-2(2) = 1 \\ y = -5+3(2) = 1 \\ z = 2+2 = 4 \\ t = 2 \end{cases}$ Ainsi, les coordonnées de H sont : $\boxed{(1\ ;\ 1\ ;\ 4)}$.

5. Volume du tétraèdre $ABCD$:
   $[AH]$ est la hauteur du tétraèdre, car A est sur la droite $\mathcal{D}$ orthogonale au plan (BCD) et H est l'intersection de $\mathcal{D}$ et (BCD), donc la projection orthogonale de A sur (BCD).
   $\mathcal{B} = 5\sqrt{7}$; $h = AH = \sqrt{(5-1)^2+(-5-1)^2+(2-4)^2} = 2\sqrt{14}$; donc :
   $\boxed{\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B}\times h = \frac{1}{3}\times 2\sqrt{14}\times\frac{5}{2}\sqrt{14} = \frac{70}{3}}$

6. Mesure de l'angle $\widehat{BAC}$:
   $\cos\widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \frac{(-6)\times(-5)+6\times6+(-2)\times0}{\sqrt{76}\times\sqrt{61}} = \frac{66}{\sqrt{4636}} \Rightarrow$
   $\boxed{\widehat{BAC}\approx 14{,}2}$ au dixième de degré près

7. (a) $\vec{n}'(4;1;5)$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$
   (b) $\vec{n}\cdot\vec{n}' = -8+3+5 = 0$, donc les deux plans sont orthogonaux.
   (c) Résolvons l'équation : $\begin{cases} -2x+3y+z-5 = 0 \\ 4x+y+5z-11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x-3y+5 \\ y = -5(2x-3y+5)-4x+11 \end{cases}$
   $\begin{cases} z = -x+2 \\ y = x+1 \end{cases}$
   Une équation paramétrique est : $\boxed{\begin{cases} x = t \\ y = 1+t \quad ,t\in\mathbb{R} \\ z = 2-t \end{cases}}$.

Exercice 2 : Fonction ln

Partie A

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}$, par composition avec la fonction inverse, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x} = 0$.

On pose $X = \ln(x)$, on a $\dfrac{\ln(x)}{x} = \dfrac{X}{e^X}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{X}{e^X} = 0$. Par composition $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x} = 0}$

Partie B

1) a) Sur $]-1\ ;\ +\infty[$, la fonction affine $(\mapsto x+1)$ est strictement croissante et est à valeurs dans $]0\ ;\ +\infty[$, intervalle sur lequel la fonction ln est strictement croissante, alors (par composition, puis somme avec la constante 1) $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]-1\ ;\ +\infty[}$.

b) • Limite en -1

$\lim\limits_{x\to-1}(x+1)=0$ et $\lim\limits_{X\to 0}\ln(X)=-\infty$, par composition et somme avec 1 :

$\boxed{\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-\infty}$

• Limite en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X)=+\infty$, alors (composition et somme avec 1) $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$

2) a) $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1}-x=1$, alors (par somme) $\boxed{\lim\limits_{x\to-1}g(x)=-\infty}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\ln(X)}{X}=0$ (croissance comparée), alors (par composition) $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}=0}$.

$$\forall x>-1,\ \ g(x)=(1+x)\underbrace{\left(\underbrace{\frac{1}{1+x}+\frac{\ln(1+x)}{1+x}}_{\to 0\text{ en }+\infty}-\frac{x}{1+x}\right)}_{\to -1\text{ en }+\infty}$$

Par conséquent, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-(1+x)=-\infty}$

c) g est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et,$\forall x>-1$, $g'(x)=f'(x)-1=\dfrac{1}{1+x}-1=\dfrac{-x}{1+x}$

Puisque $x>-1$, $1+x>0$ et $g'(x)$ est du signe de $-x$.

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
g	‖	$-\infty$ ↗	1	↘ $-\infty$	

d) g est continue (car dérivable) sur $]-1\ ;\ 0]$ et $0\in\left]\lim\limits_{x\to-1}g(x);g(0)\right]$

alors (cthéorème des valeurs intermédiaires) l'équation $g(x)=0$ possède au moins une solution dans $]-1\ ;\ 0]$, g étant de plus strictement monotone (croissante) sur $]-1\ ;\ 0]$ cette solution est unique. On la note α et $\alpha\in]-1\ ;\ 0]$.

De même, g continue, strictement monotone (décroissante) sur $[0;+\infty[$ et $0\in\left]\lim\limits_{x\to+\infty}g(x);g(0)\right]$, alors l'équation $g(x)=0$ a une, et une seule solution β dans $[0;+\infty[$ et, puisque $g(2)>0$ et $0>g(3)$, $\beta\in[2\ ;\ 3]$.

e) De **c)** et **d)** on déduit le signe de $g(x)$

x	-1		α		0	β		$+\infty$
signe de $g(x)$	‖	$-$	0	$+$		0	$-$	

Le signe de $g(x)=f(x)-x$ indique la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à D :

— $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de D sur $]-1;\alpha[$ et sur $]\beta;+\infty[$;
— $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de D sur $]\alpha;\beta[$.

Partie C

1) On considère la proposition dépendant de l'entier naturel n,

$$\mathcal{P}(n)\ :\ll\ 2\leqslant u_n\leqslant\beta\ \gg$$

On raisonne par récurrence :

Initialisation $\mathcal{P}(0)\ :\ll\ 2\leqslant u_0\leqslant\beta\ \gg$ **est vraie car** $u_0=2$.

Hérédité Soit $n\in\mathbb{N}$.

On suppose que $\mathcal{P}(n)\ :\ll\ 2\leqslant u_n\leqslant\beta\ \gg$ **est vraie.**
Démontrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)\ :\ll\ 2\leqslant u_{n+1}\leqslant\beta\ \gg$ **est vraie.**

Puisque, Partie A, question 1) a), f **est croissante sur** $]-1;+\infty[$ **:**

Si $2\leqslant u_n\leqslant\beta$ **alors** $f(2)\leqslant f(u_n)\leqslant f(\beta)$
alors $1+\ln(3)\leqslant u_{n+1}\leqslant f(\beta)$

comme $2<1+\ln(3)$ **et** $g(\beta)=f(\beta)-\beta=0$, **on a** $f(\beta)=\beta$,
alors $2\leqslant u_{n+1}\leqslant\beta$

Conclusion $\forall n\in\mathbb{N},\ \ 2\leqslant u_n\leqslant\beta$

2) Soit $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=g(u_n)$.

Puisque $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\in[2;\beta]$ **et** g **positive sur** $[2\ ;\ \beta]$, **alors**

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n\geqslant 0$$

$\boxed{\textbf{La suite } (u_n) \textbf{ est croissante et majorée alors elle converge}}$ **vers un réel** ℓ.

Comme f **est continue,** $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}f(u_n)=f(\ell)=\ell$. **Selon la partie** B, **seuls** α **et** β **vérifient cette égalité.** $\alpha<0$, **on en déduit que** $\boxed{\ell=\beta}$