Durée 2 heures. Le barème est donné à titre indicatif.
Le manque de soin et de clarté dans la rédaction sera pénalisé.

Exercice 1 : Fonction de densité (15 minutes) (3 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{18}x - \frac{1}{18} \text{ si } x \in [1;7] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f est une fonction de densité.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi continue dont la fonction densité est f.

2. Calculer $P(2 < X < 3)$
3. Calculer $E(X)$.

Exercice 2 : Probabilité et fluctuation (40 minutes) (7½ points)

Les parties A B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes. Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes est un pain non-commercialisable, un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.

La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 400$ et d'écart-type $\sigma = 10$.

Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche

Partie A

1. Calculer $P(390 \leqslant X \leqslant 410)$.
2. Calculer la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.
3. Le fabricant trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de σ sans modifier celle de μ.
   Pour quelle valeur de σ la probabilité qu'un pain soit commercialisable est-elle égale à 96 % ? On arrondira le résultat au dixième.
   On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1, on a $P(Z \leqslant -1{,}751) \approx 0{,}040$.

Partie B

Les méthodes de production ont été modifiées dans le but d'obtenir 96 % de pains commercialisables.
Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300.
2. Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables.
   Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1, peut-on décider que l'objectif a été atteint ?

Partie C

Le boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de 0,913. En déduire la valeur de λ arrondie au millième.

   Dans toute la suite on prendra $\lambda = 0{,}003$.

2. Quelle est la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours ?
3. Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. A-t-il raison ? Si non, pour combien de jours est-ce vrai ?

Exercice 3 : Nombres complexes (50 minutes) (7½ points)

On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel n, on définit les points (A_n) par leurs coordonnées $(x_n\ ;\ y_n)$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_0 &= -3 \\ y_0 &= 4 \end{cases} \quad \text{et pour tout entier naturel } n : \begin{cases} x_{n+1} &= 0{,}8x_n - 0{,}6y_n \\ y_{n+1} &= 0{,}6x_n + 0{,}8y_n \end{cases}$$

1. (a) Déterminer les coordonnées des points A_0, A_1 et A_2.
   (b) Pour construire les points A_n ainsi obtenus, on écrit l'algorithme suivant :

```
Variables :
i, x, y, t : nombres réels

Initialisation :
x prend la valeur −3
y prend la valeur 4

Traitement :
Pour i allant de 0 à 20
    Construire le point de coordonnées (x ; y)
    t prend la valeur x
    x prend la valeur ....
    y prend la valeur ....
Fin Pour
```

   Recopier et compléter cet algorithme pour qu'il construise les points A_0 à A_{20}.
   (c) À l'aide d'un tableur, on a obtenu le nuage de points de l'annexe :
   Identifier les points A_0, A_1 et A_2.. On les nommera sur la figure jointe en **annexe, (à rendre avec la copie)**.
   Quel semble être l'ensemble auquel appartiennent les points A_n pour tout n entier naturel ?
2. Le but de cette question est de construire géométriquement les points A_n pour tout n entier naturel.
   Dans le plan complexe, on nomme, pour tout entier naturel n, $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ l'affixe du point A_n.
   (a) Soit $u_n = |z_n|$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?
   (b) On admet qu'il existe un réel θ tel que $\cos(\theta) = 0{,}8$ et $\sin(\theta) = 0{,}6$.
   Montrer que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_n = z_{n+1}$.
   (c) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} z_0$.
   (d) Montrer que $\theta + \dfrac{\pi}{2}$ est un argument du nombre complexe z_0.
   (e) Pour tout entier naturel n, déterminer, en fonction de n et θ, un argument du nombre complexe z_n.
   Représenter θ sur la figure jointe en **annexe 2, (à rendre avec la copie).**
   Expliquer, pour tout entier naturel n, comment construire le point A_{n+1} à partir du point A_n.

Exercice 4 : Prise d'initiative (15 minutes) (2 points)

Dans une population donnée, 12% des individus sont gauchers. Unt est de QI est réalisé.
Le résultat des droitiers peut être modélisé par une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne 100 et d'écart-type 10. Le résultat des gauchers peut être modélisé par une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne 110 et d'écart-type 15. On choisit au hasard un individu. Son QI est supérieur à 105. Quelle est la probabilité que cet individu soit droitier ?