Exercice 1 : Fonction de densité

1. f est continue par morceaux. f est croissante et $f(1) = 0$ donc $f(x) \geqslant 0$ sur $[1; 7]$.
   $\int_1^7 f(x)dx = \left[\frac{1}{36}x^2 - \frac{1}{18}x\right]_1^7 = 1$
2. $P(2 < X < 3) = \int_2^3 f(x)dx = \left[\frac{1}{36}x^2 - \frac{1}{18}x\right]_2^3 = \boxed{\dfrac{1}{12}}$
3. $E(X) = \int_1^7 xf(x)dx = \left[\frac{x^3}{54} - \frac{x^2}{36}\right]_1^7 = \boxed{5}$.

Exercice 2 : Probabilité et fluctuation

Partie A

On attend une courbe en cloche tracée.

1. $P(390 \leqslant X \leqslant 410) = P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx \boxed{0{,}683}$
2. $P(X > 385) = 1 - P(X \leqslant 385) = 1 - \dfrac{1 - P(385 < X < 415)}{2} \approx 0{,}933$.
   $\boxed{\text{La probabilité de choisir un pain commercialisable est de } 0{,}933.}$
3. Soit Y la variable aléatoire de paramètres $\mu = 400$ et σ, on a :
   $p(X \geqslant 385) = 0{,}96 \Leftrightarrow 1 - p(Y < 385) = 0{,}96 \Leftrightarrow p(Y < 385) = 0{,}04$
   Si Y suit une loi normale de paramètres $\mu = 400$ et σ, on sait que $Z = \dfrac{X - 400}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite et $p(Y < 385 \approx 0{,}04 \Leftrightarrow P\left(Z \leqslant \dfrac{385 - 400}{\sigma}\right) \approx 0{,}04$.
   Or $P(Z \leqslant -1{,}751) \approx 0{,}040$.On a donc : $\dfrac{-15}{\sigma} = -1{,}751 \Leftrightarrow \sigma \approx \dfrac{15}{1{,}751} \approx 8{,}6$.
   Pour $\sigma = 8{,}6$, au dixième près ; la probabilité qu'un pain soit commercialisable est de 96%

Partie B

1. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300 est de la forme
   $$I_{300} = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$
   avec $p = 0{,}96$ et $n = 300$. $n = 300 \geqslant 30$, $np = 285 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 12 \geqslant 5$ donc les conditions sont vérifiées.
   On a donc : $I_{300} = [0{,}937\ ;\ 0{,}983]$.
2. Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables. Ce qui représente 94 % de la production.
   Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1, on accepte que l'objectif a été atteint.

Partie C

1. On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de $p(T \geqslant 30) = 0{,}913$.
   On a par ailleurs : $p(T \leqslant 30) = \int_0^{30} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{30} = 1 - e^{-30\lambda}$.
   On en déduit : $p(T \geqslant 30) = 1 - p(T \leqslant 30) = e^{-30\lambda}$ et finalement :
   $e^{-30\lambda} = 0{,}913 \Leftrightarrow -30\lambda = \ln(0{,}913) \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{\ln(0{,}913)}{30}$.
   Dans toute la suite on prendra $\lambda = 0{,}003$.
2. Calculons $p_{T\geqslant 60}(T \geqslant 90)$.
   La loi exponentielle est une loi à durée de vie sans vieillissement donc $p_{T\geqslant 60}(T \geqslant 90) = p(T \geqslant 30) = 0{,}913$.
   La probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours est 0,913
3. Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. Calculons la durée maximale t_{max} pour laquelle la probabilité que la balance dérègle est inférieure à 0,5.
   $p(T \leqslant t_{\max}) \leqslant 0{,}5 \Leftrightarrow= \int_0^{t_{\max}} \lambda e^{-\lambda x}\,dx \leqslant 0{,}5 \Leftrightarrow [-e^{-\lambda x}]_0^{t_{\max}} \leqslant 0{,}5 \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda t_{\max}} \leqslant 0{,}5$
   $1 - e^{-\lambda t_{\max}} \leqslant 0{,}5 \Leftrightarrow e^{-\lambda t_{\max}} \geqslant 0{,}5 \Leftrightarrow -\lambda t_{max} \geqslant \ln 0.5$
   Avec $\lambda = 0{,}003$, on trouve $t_{\max} = 231$. Le vendeur avait donc tort.

Exercice 3 : Nombres complexes

1. (a) On applique les formules de récurrence proposées en utilisant un petit programme fait à la calculatrice.
   On obtient :
   $$A_0\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} \qquad A_1\begin{pmatrix}-4{,}8\\1{,}4\end{pmatrix} \qquad A_2\begin{pmatrix}-4{,}68\\-1{,}76\end{pmatrix}$$
   (b) :
   ```
   Traitement :
   Pour i allant de 0 à 20
       Construire le point de coordonnées (x ; y)
       t prend la valeur x
       x prend la valeur 0,8 × x − 0,6 × y .
       y prend la valeur 0,6 × t + 0,8 × y.
   Fin Pour
   ```
   (c) On a identifié les points sur l'annexe en fonction de leurs coordonnées. Ils semblent appartenir à un cercle de centre O et de rayon 5.

2. (a) Faisons une démonstration par récurrence puisque la suite z est définie par récurrence.

Au rang 0, $|z_0| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = 5$. La propriété est vérifiée.

Fixons un entier p et supposons que $|z_p| = \sqrt{x_p^2+y_p^2} = 5$.

Au rang $p+1$:

$$\begin{aligned}
|z_{p+1}| &= \sqrt{x_{p+1}^2+y_{p+1}^2}\\
&= \sqrt{(0{,}8x_p-0{,}6y_p)^2+(0{,}6x_p+0{,}8y_p)^2}\\
&= \sqrt{(0{,}8^2+0{,}6^2)x_p^2+(0{,}6^2+0{,}8^2)y_p^2+(0{,}8\times 0{,}6-0{,}6\times 0{,}8)x_py_p}\\
&= \sqrt{x_p^2+y_p^2}\text{. Or, par hypothèse, } \sqrt{x_p^2+y_p^2}=5\text{. Donc :}\\
|z_{p+1}| &= 5
\end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire et initialisée.

Ainsi, pour tout n, on a bien $u_n = |z_n| = 5$, ce qui prouve notre conjecture concernant le lieu des points.

(b) Calculons, pour tout n, la forme algébrique de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z_n$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z_n &= (\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta))\,(x_n+\mathrm{i}y_n)\\
&= (0{,}8+0{,}6\mathrm{i})(x_n+\mathrm{i}y_n)\\
&= (0{,}8x_n+0{,}6\mathrm{i}^2y_n)+(0{,}6x_n+0{,}8y_n)\mathrm{i}\\
&= (0{,}8x_n-0{,}6y_n)+(0{,}6x_n+0{,}8y_n)\mathrm{i}
\end{aligned}$$

On reconnaît les formules de récurrence de x_{n+1} et y_{n+1} :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z_n &= x_{n+1}+\mathrm{i}y_{n+1}\\
&= z_{n+1}
\end{aligned}$$

(c) z est une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ sur des complexes.

Pour $n=0$ la formule est bien sûr vraie. Supposons-la vraie à un rang p fixé : $z_p = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\theta}z_0$.

Mais nous savons que $z_{p+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z_p = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\theta}z_0$. On a ainsi : $z_{p+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\theta+\mathrm{i}\theta}z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+1)\theta}z_0$.

La propriété est donc héréditaire et initialisée.

Ainsi, pour tout n, on a bien $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}z_0$.

(d) Posons $\theta_0 = \arg(z_0)$. Par définition :

$$\begin{aligned}
\frac{z_0}{|z_0|} &= \cos(\theta_0)+\mathrm{i}\sin(\theta_0)\,.\\
\text{Or : } \frac{z_0}{|z_0|} &= \frac{-3}{5}+\mathrm{i}\frac{4}{5}\\
&= -0{,}6+\mathrm{i}0{,}8\text{. On reconnaît les valeurs de cos et sin de } \theta \text{ :}\\
&= -\sin(\theta)+\mathrm{i}\cos(\theta)\text{. En utilisant les formules de trigonométrie, on a :}\\
\frac{z_0}{|z_0|} &= \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)
\end{aligned}$$

On a donc bien, en identifiant la première et la dernière ligne, $\arg(z_0) = \theta_0 = \dfrac{\pi}{2}+\theta$

(e) On utilise les propriétés de l'argument :

$$\arg(z_n) = \arg\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}z_0\right) = \arg\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right)+\arg(z_0) = n\theta+\frac{\pi}{2}+\theta = (n+1)\theta+\frac{\pi}{2}$$

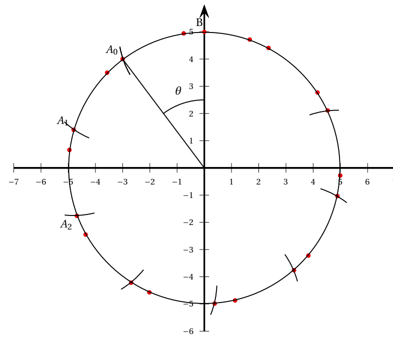
On représente θ en utilisant le point A_0. En effet, ce point vérifie $\left(\overrightarrow{\imath}\,;\,\overrightarrow{OA_0}\right) = \arg(z_0) = \theta+\dfrac{\pi}{2}$.

Ainsi, on obtient facilement, par différence, que $\left(\overrightarrow{\jmath}\,;\,\overrightarrow{OA_0}\right) = \theta$.

On a tracé θ en annexe en utilisant cette dernière remarque.

Pour obtenir A_{n+1} :

À partir du point A_n, on se déplace d'un angle θ sur le cercle de rayon 5 et de centre O pour obtenir A_{n+1}. Cette opération peut se faire à l'aide d'un compas en reportant une longueur correspondant à θ.



Exercice 4 : Prise d'initiative (15 minutes)

Soient les événements D : « L'individu sélectionné est droitier »et Q : « L'individu sélectionné a un QI supérieur à 105 ».

Soient X et Y tels que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(100;10^2)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(110;15^2)$. On veut calculer $P_Q(D)$.

On sait que $P_Q(D) = \dfrac{P(D\cap Q)}{P(Q)}$.

$P_D(Q) = P(X>105)$ et $P_{\bar{D}}(Q) = P(Y>105)$.

Par la formule des probabilités totales

$P(Q) = P(D)\times P_D(Q)+P(\bar{D})\times P_{\bar{D}}(Q) = 0{,}88\times P(X>105)+0{,}12\times P(Y>105)$.

On a alors $P_Q(D) = \dfrac{0{,}88\times P(X>105)}{0{,}88\times P(X>105)+0{,}12\times P(Y>105)} \approx 0{,}782$ à 10^{-3} près.