Durée 2 heures. Le barème est donné à titre indicatif.
Le manque de soin et de clarté dans la rédaction sera pénalisé.

Exercice 1 : Restitution organisée des connaissances (15 minutes) (3 points)

Prérequis : définition d'une suite tendant vers plus l'infini :

« *une suite tend vers* $+\infty$ *si, pour tout réel* A*, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à* A *.* »

Démontrer le théorème suivant :

Soient deux suites u et v et un entier N tels que pour tout entier $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n$.

Si $\lim u_n = +\infty$ alors $\lim v_n = +\infty$.

Exercice 2 : Quelques limites pour s'échauffer (20 minutes) (4 points)

Calculer les limites des suites suivantes lorsqu'elles existent.

1. $u_n = 2 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
2. $v_n = 3^n - 7^n$.
3. $w_n = \dfrac{\cos n}{n^2+1}$.
4. $x_n = \dfrac{-2n^2+n-1}{n^2+2n+1}$.

Exercice 3 : Une petite récurrence (15 minutes) (4 points)

Soit u définie pour tout entier n par $u_n = 3n+2$.

1. Conjecturer puis démontrer la nature de cette suite. On précisera si ça a un sens la raison et le premier terme.
2. Démontrer par récurrence pour tout entier n : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(n+1)(3n+4)}{2}$.

Exercice 4 : Un petit problème (50 minutes) (7 points)

Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier n , $u_n \geqslant n$.
   (b) En déduire la limite de la suite u.
3. Démontrer que la suite u est croissante.
4. Soit v la suite définie pour tout entier n par $v_n = u_n - n + 1$.
   (a) Démontrer que la suite v est géométrique.
   (b) En déduire que, pour tout entier n, $u_n = 3^n + n - 1$.
5. Soit p un entier naturel non nul.
   (a) Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$?
   On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0.
   (b) Justifier que $n_0 \leqslant 3p$.
   (c) Déterminer à l'aide de la calculatrice, cet entier n_0 pour la valeur $p = 3$.
   (d) Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$.

Exercice 5 : Question ouverte (15 minutes) (2 points)

Dans cet exercice, toute prise d'initiative sera récompensée

On considère la suite u telle que :

$$u_0 = \frac{1}{3};\; u_1 = \frac{1+3}{5+7};\; u_2 = \frac{1+3+5}{7+9+11};$$

et ainsi de suite.

La suite u converge-t-elle ?