Exercice 1 : Restitution organisée des connaissances

Voir le cours

Exercice 2 : Quelques limites pour s'échauffer

1. Par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7^n \left[\left(\dfrac{3}{7}\right)^n - 1\right]$.

   Or $-1 < \dfrac{3}{7} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{7}\right)^n = 0$.

   Par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\left(\dfrac{3}{7}\right)^n - 1\right] = -1$.

   $7 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 7^n = +\infty$.

   Par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}, -1 \leqslant \cos n \leqslant 1$.

   Or pour tout $n \in \mathbb{N}, n^2+1 > 0$.

   D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{-1}{n^2+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n^2+1}$.

   D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
4. Pour tout $n \neq 0, u_n = \dfrac{n^2\left(-2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{-2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n}}$.

   Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$.

Exercice 3 : Une petite récurrence

1. u semble être une suite arithmétique.

   $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 2 - 3n - 2 = 3$, u est donc bien une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme 2
2. Pour tout entier n, on appelle $P(n)$ la propriété : « $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(n+1)(3n+4)}{2}$. »

   Démontrons que pour tout n, $P(n)$ est vraie.

   Initialisation : Pour $n = 0$,

   $u_0 = 2$ et $\dfrac{(0+1)(3\times 0+4)}{2} = 2$, donc $P(0)$ est vraie.

   Hérédité : Supposons que pour un entier $n \geqslant 0$, $P(n)$ est vraie et montrons qu'alors, $P(n+1)$ est vraie.

   $P(n+1)$ s'écrit : « $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} u_k = \frac{(n+2)(3n+7)}{2}$. »

   D'après l'hypothèse de récurrence : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(n+1)(3n+4)}{2}$

   Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} u_k = \frac{(n+1)(3n+4)}{2} + u_{n+1} = \frac{(n+1)(3n+4)}{2} + 3(n+1) + 2 = \frac{3n^2+13n+14}{2}$.

   D'autre part, $\dfrac{(n+2)(3n+7)}{2} = \dfrac{3n^2+6n++7n+14}{2} = \dfrac{3n^2+13n+14}{2}$.

   On a bien $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} u_k = \frac{(n+2)(3n+7)}{2}$.

   Donc $P(n+1)$ est vraie.

   Conclusion : On a bien démontré par récurrence que pour tout entier n, $P(n)$ est vraie.

Exercice 4 : Un petit problème

1. $u_1 = 3$ et $u_2 = 10$. part
   (a) Démontrons par récurrence, pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$: $u_n \geqslant n$.

   Initialisation $u_0 = 0 \geqslant 0$ donc la propriété $P(0)$ est vérifiée.

   Hérédité Supposons que pour un entier $n \geqslant 0$, $P(n)$ est vraie et montrons qu'alors, $P(n+1)$ est vraie.
   $P(n+1)$ s'écrit : « $u_{n+1} \geqslant n+1$ »
   Or $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$
   D'après l'hypothèse de récurrence $u_n \geqslant n$ donc $u_{n+1} \geqslant 3n - 2n + 3 \geqslant n + 3 \geqslant n + 1$
   Donc $P(n+1)$ est vraie.

   Conclusion On en déduit que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

   (b) d'après un théorème de comparaison $\lim (u_n) = +\infty$.

2. Pour tout entier naturel n ; $u_{n+1} - u_n = 3u_n - 2n + 3 - u_n = 2u_n - 2n + 3 \geqslant 3 \geqslant 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

3. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.
   (a) Pour tout entier naturel n $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) + 1 = 3u_n - 2n + 3 - n - 1 + 1 = 3(u_n - n + 1) = 3v_n$.
   La suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison 3.
   (b) Pour tout entier naturel n, $v_n = 3^n$ et $u_n = v_n + n - 1$ donc $u_n = 3^n + n - 1$.

4. Soit p un entier naturel non nul.
   (a) La suite (u_n) tend vers $+\infty$ donc on peut affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$.
   (b) $u_{3p} = 3^{3p} + 3p - 1 = 27^p + 3p - 1 \geqslant 27^p \geqslant 10^p$ donc $n = 3p$ est une valeur de n telle que $u_n \geqslant 10^p$; n_0 étant la plus petite de ces valeurs, on a donc $n_0 \leqslant 3p$
   (c) $u_6 = 734$ et $u_7 = 2193$ et u est croissante donc pour la valeur $p = 3$; $n_0 = 7$.
   (d) Algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $u_n \geqslant 10^p$.

Entrée
Saisir le nombre entier naturel non nul p.
Traitement
Affecter à U la valeur 0
Affecter à k la valeur 0
Tant que $U < 10^p$
Affecter à U la valeur $3U - 2k + 3$
Affecter à k la valeur $k + 1$
Fin tant que
Sortie
Afficher k

Exercice 5 : Question ouverte

On remarque que le numérateur du n-ième terme est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2. Le numérateur de u_n est donc $(n+1)\dfrac{2n+2}{2}$

Le dénominateur est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite arithmétique de premier terme $2n+3$ et de raison 2. Le dénominateur de u_n est donc $(n+1)\dfrac{2n+3+4n+3}{2} = (n+1)\dfrac{6n+6}{2}$.

On a donc pour tout entier n, $u_n = \dfrac{(n+1)(2n+2)}{(n+1)(6n+6)} = \frac{1}{3}$.

u est une suite constante, elle converge donc vers $\frac{1}{3}$