Durée 2 heures. Le barème est donné à titre indicatif.
Le manque de soin et de clarté dans la rédaction sera pénalisé.

Exercice 1 : Restitution organisée des connaissances (15 minutes) (3 points)

z et z' sont des nombres complexes tels que $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont des réels.

1. Démontrer que pour tous nombres complexes z et $\bar{z}$: $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \overline{z'}$.
2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul et tout nombre complexe z : $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$.

Exercice 2 : Exercices classiques (35 minutes) (6 points)

1. Résoudre les équations en z dans $\mathbb{C}$. On donnera les formes algébriques.

   (a) $2z - 4 + i = iz - 3$ (b) $2z - \bar{z} + 5 - i = 0$ (c) $2z^2 - 4z + 3 = 0$ (d) $2z - 5 - 2i = i\bar{z} - 3$

2. Soient trois points A, B, C d'affixe $z_A = i$, $z_B = 5 + 2i$ et $z_C = -3 + 3i$. Déterminer les coordonnées de D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
3. Soit $z = x + iy$, exprimer les parties réelles et imaginaires de $z' = \dfrac{z+2}{1-iz}$ en fonction de x et y.
4. Déterminer les limites suivantes

   (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. (b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x\,(2 + \sin(x))}{x^2 + 1}$.

Exercice 3 : Problème : Étude d'une fonction (35 minutes) (6 points)

Partie A

Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

1. Déterminer les limites en $-\infty$ de g. Donner sans démonstration les limites de g en $+\infty$.
2. Dresser le tableau de variations complet de g.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
4. Déterminer α à 10^{-1} près.
5. En déduire le tableau de signes de $g(x)$.

Partie B

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$.

1. Donner l'ensemble de définition D_f de f.
2. Déterminer les limites de f en -1 et $-\infty$. Donner sans démonstration les limites en 1 et $+\infty$.
3. En déduire une interprétation graphique
4. Démontrer que pour tout $x \in D_f$: $f'(x) = \dfrac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$.
5. Dresser le tableau de variations de f.
6. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{3(2\alpha + 3)}{\alpha^2 - 1}$

Exercice 4 : Problème : Étude d'une transformation (30 minutes) (5 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on associe à tout point M d'affixe z non nulle, le point M' milieu du segment $[MM_1]$ où M_1 est le point d'affixe $\frac{1}{z}$.

Le point M' est appelé image de M.

1. Soit A d'affixe $z_A = \sqrt{3} + i$
   (a) Placer A (on laissera les traits de construction).
   (b) Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point A_1 d'affixe $\frac{1}{z_A}$. Placer A_1.
   (c) En déduire l'affixe du point A' le milieu de $[AA_1]$. Placer ce point.
2. (a) Justifier que pour tout nombre complexe z non nul, le point M' a pour affixe : $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.
   (b) B et C sont les points d'affixes respectives $2i$ et $-2i$. Calculer les affixes des points B' et C', images respectives de B et C.
   (c) Placer B, C, B' et C' sur la figure.
3. Déterminer le(s) antécédent(s) de O.
4. Déterminer l'ensemble des points M tels que $M' = M$.
5. **Prise d'initiative :** Démontrer que si M appartient au cercle de centre O et de rayon 1, alors son image M' appartient au segment $[KL]$ où K et L sont les points d'affixes respectives de -1 et 1.