Exercice 1 : Restitution organisée des connaissances

Voir les exercices.

Exercice 2 : Exercices classiques

1. Résoudre les équations dans $\mathbb{C}$

   (a) $S = \{\frac{3-i}{5}\}$ (b) $S = \{-5 + \frac{i}{3}\}$ (c) $S = \{1 - i\frac{\sqrt{2}}{2}; 2 + i\frac{\sqrt{2}}{2}\}$

   (d) On obtient $2x - 2 - y + i(2y - 2 - x) = 0$. On résout un système d'équations pour obtenir $S = \{2 + 2i\}$

2. $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, c'est-à-dire $z_B - z_A = z_C - z_D$ c'est-à-dire $5 + i = -3 + 3i - z_D$, ce qui est équivalent à $z_D = 2i - 8$

3. $z' = \dfrac{x + iy + 2}{1 - ix + y} = \dfrac{(x + 2 + iy)(1 + y + ix)}{(1 + y)^2 + x^2} = \dfrac{(x + 2 + 2y) + i(x^2 + 2x + y + y^2)}{(1 + y)^2 + x^2}$.

4. Non rédigée :

   (a) En utilisant correctement les limites de fonctions composées. $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1$.

   (b) En utilisant correctement le théorème des gendarmes. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x\,(2 + \sin(x))}{x^2 + 1} = 0$.

Exercice 3 : Problème : Étude d'une fonction

Partie A

1. Pour $x \neq 0$, $g(x) = x^3(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3})$. $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3} = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$. Par produit, la fonction diverge vers $-\infty$. En $+\infty$, elle diverge vers $+\infty$

2. g est dérivable comme fonction polynôme. $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$. On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

3. Selon le tableau de variations, g admet un maximum de -1 sur $]-\infty; 1]$. $g(x) = 0$ n'admet donc pas de solution sur cet intervalle.

   Sur $[1; +\infty[$:

   — g est continue.

   — g est strictement croissante.

   — $g(1) = -5$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

   Par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1; +\infty[$.

   $g(x) = 0$ admet donc une unique solution sur $\mathbb{R}$.

4. $2{,}1 < \alpha < 2{,}2$ donc $\alpha \approx 2{,}2$

5. g est croissante sur $[1; +\infty[$ donc

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

1. f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

2. $\lim\limits_{x \to -1} 2x^3 + 3 = 5$ et $\lim\limits_{x \to -1} x^2 - 1 = 0$. Si $x < -1$, alors $x^2 - 1 > 0$, donc par quotient $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$.

De même, on a $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$.

Pour $x \neq 0$, $g(x) = \dfrac{x\left(2 + \frac{3}{x^3}\right)}{1 - \frac{1}{x^2}}$. En $-\infty$, le numérateur diverge vers $-\infty$ (par produit) et le dénominateur tend vers 1. Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.

Par ailleurs $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} g(x) = +\infty$.

3. Il existe donc deux asymptotes verticales d'équation $x = -1$ et $x = 1$
4. f est dérivable sur D_f comme quotient de polynômes avec le dénominateur non nulle. On pose $u(x) = 2x^3 + 3$ et $v(x) = x^2 - 1$, On a $u'(x) = 6x^2$ et $v'(x) = 2x$.

   Donc $f'(x) = \dfrac{6x^2(x^2-1) - 2x(2x^3+3)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2x(3x^3 - 3x - 2x^3 - 3)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$

5.

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

6. On sait que $g(\alpha) = 0$ donc $\alpha^3 = 3\alpha + 3$

   $f(\alpha) = \dfrac{2\alpha^3 + 3}{\alpha^2 - 1} = \dfrac{2(3\alpha + 3) + 3}{\alpha^2 - 1} = \dfrac{3(2\alpha + 3)}{\alpha^2 - 1}$.

Exercice 4 : Problème : Étude d'une transformation

1. Soit A d'affixe $z_A = 1 + i\sqrt{3}$
   (a) Il faut tracer un cercle de centre O et de rayon 2, on reconnaît $z_A = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$
   (b) $z_{A_1} = \dfrac{1}{\sqrt{3} + i} = \dfrac{\sqrt{3} - i}{4}$. Pour le placer, on utilise cette fois un cercle de centre $\frac{1}{2}$
   (c) $z_{A'} = \dfrac{z_A + z_{A_1}}{2} = \dfrac{4\sqrt{3} + 4i + \sqrt{3} - i}{8} = \dfrac{5\sqrt{3} + 3i}{8}$. On place le milieu avec le compas
2. (a) Le milieu de z et $\frac{1}{z}$ est donné par la formule : $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.
   (b) $z_{B'} = \frac{1}{2}\left(z_B + \frac{1}{z_B}\right) = \frac{3}{4}i$ et $z_{C'} = \frac{-3}{4}i$
   (c) Il suffit de les placer à partir des coordonnées.
3. $z + \frac{1}{z} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{z^2 + 1}{z} = 0$. Les antécédents de O sont les points d'affixe i et $-i$
4. $\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = z \Leftrightarrow \dfrac{-z^2 + 1}{z}$. Les points stables sont les points d'affixe 1 et -1.
5. Soit M d'affixe $z = x + iy$ un point du cercle de centre O et de rayon 1. Donc $x^2 + y^2 = 1$

   $z' = \frac{1}{2}\left(x + iy + \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}\right) = \frac{1}{2}(x + iy + x - iy) = x$.

   Comme M appartient au cercle de centre O et de rayon 1, on en conclut que $-1 < x < 1$, ce qui démontre la propriété.