Durée 2 heures. Le barème est donné à titre indicatif.
Le manque de soin et de clarté dans la rédaction sera pénalisé.

Exercice 1 : Restitution organisée des connaissances (15 minutes) (3 points)

Seule la formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables et la dérivée de x sont supposées connues.

On a énoncé ci-dessous deux propositions désignées par P et Q. Dire pour chacune d'elles si vraie ou fausse et justifier.

Dans cet exercice n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.

1. P : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée sur $\mathbb{R}$ par : $f'(x) = nx^{n-1}$.
2. Q : Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f = u^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée par $f' = nu^{n-1}$.

Exercice 2 : Exercices classiques (35 minutes) (6 points)

1. Résoudre les équations suivantes sur $[0; 2\pi]$:

   (a) $\cos(x) = \frac{1}{2}$ (b) $\sin(3x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $2\sin^2(x) - 3\sin(x) + 1 = 0$

2. Dériver les fonctions suivantes sans vous occuper de l'ensemble de dérivabilité :

   (a) $f(x) = \sin(2x + 5)$ (b) $g(x) = \cos^5(x)$ (c) $h(x) = \dfrac{1}{\cos^3(4x)}$

3. Donner les formules de $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$, puis utiliser les pour retrouver les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$
4. Montrer que f définie par $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} - \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est périodique de période $\frac{\pi}{2}$ sur son domaine de définition.

Exercice 3 : Problème (40 minutes) (6 points)

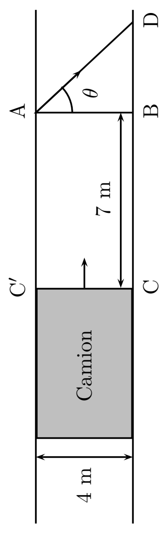
On considère la fonction f définie pour tout réel x d'un ensemble D_f par : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f puis l'ensemble de dérivabilité de f.
2. (a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 1; x > 1} f(x)$. puis $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   (b) Que peut-on déduire graphiquement de ces résultats.
3. (a) Justifier que pour tout réel x de $]1; +\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{-1}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}}$.
   (b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]1; +\infty[$
   (c) En déduire que $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $]1; +\infty[$
4. (a) Étudier la parité de f.
   (b) En déduire le tableau de variations de f sur D_f.
5. Déterminer l'équation réduite de la tangente à f en 2.
6. Soit g la fonction définie, pour tout réel x de D_f par : $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
   (a) Montrer que g est une primitive de f.
   (b) Déterminer la primitive F telle que $F(2) = 0$

Exercice 4 : Problème semi-ouvert (30 minutes) (5 points)

Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h. Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est à dire à ... 30 km/h !
L'avant du camion est représenté par le segment [CC′] sur le schéma ci-contre.
Le lapin part du point A en direction de D.
Cette direction est repérée par l'angle $\theta = \widehat{\text{BAD}}$ avec $0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}$ (en radians).



1. Déterminer les distances AD et CD en fonction de θ et les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD.
2. On pose $f(\theta) = \dfrac{7}{2} + 2\tan\theta - \dfrac{4}{\cos\theta}$.
   Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$.
3. Conclure.

Rappel :

La fonction $x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $\left[0 \,;\, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et a pour dérivée la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{cos^2(x)}$