Durée 2 heures. Le barème est donné à titre indicatif.
Le manque de soin et de clarté dans la rédaction sera pénalisé.

Exercice 1 : Restitution organisée des connaissances

1. P est vraie. Preuve par récurrence. Pour tout entier n, on appelle $P(n)$ la propriété : « Si $f(x) = x^n$, alors $f'(x) = nx^{n-1}$ ». Démontrons $P(n)$.

   Initialisation : Pour $n = 2$, $f(x) = x^2$ donc $f'(x) = 2x$.
   De plus $2 \times x^{2-1} = 2x$ donc $P(2)$ est vraie.

   Hérédité : Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier n supérieur ou égal à 1. Montrons que $P(n+1)$ est vraie.
   $P(n+1)$ s'écrit : « Si $f(x) = x^{n+1}$, alors $f'(x) = (n+1)x^n$.
   Soit g définie par $g(x) = x^n$, par hypothèse de récurrence, $g'(x) = nx^{n-1}$.
   $f(x) = g(x) \times x$ donc $f'(x) = g'(x) \times x + g(x) \times 1$
   Donc $f'(x) = nx^{n-1} \times x + x^n = (n+1) \times x^n$.
   Donc $P(n+1)$ est vraie.

   Conclusion : On a initialisation et hérédité donc $P(n)$ est vraie pour tout entier n.

2. C'est faux car pour $n = 2$, on a avec le produit $(u^2)' = u \times u = u' \times u + u \times u' = 2u'u \neq 2u$. En prenant $u(x) = 2x$, on a $(u^2)'(x) = 8x$ alors que $2u(x) = 4x$.

Exercice 2 : Exercices classiques

1. Résoudre les équations suivantes sur $[0; 2\pi]$:

   (a) $S = \left\{\frac{\pi}{3};\ \frac{5\pi}{3}\right\}$

   (b) $S = \left\{\frac{4\pi}{9};\ \frac{10\pi}{9};\ \frac{16\pi}{9};\ \frac{5\pi}{9};\ \frac{11\pi}{9};\ \frac{17\pi}{9}\right\}$

   (c) On pose $X = \sin(x)$, l'équation devient $2X^2 - 3X + 1 = 0$. Les solutions sont 1 et $\frac{1}{2}$. L'équation devient alors $\sin(x) = 1$ ou $\sin(x) = \frac{1}{2}$. Il y a trois solutions $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$

2. Il faut détailler les calculs

   (a) $f'(x) = 2\cos(2x+5)$

   (b) $g'(x) = -5\sin(x)\cos^4(x)$

   (c) $h'(x) = -3 \times (-4\sin(4x)) \times \cos^{-4}(4x) = \dfrac{12\sin(4x)}{\cos^4(x)}$

   $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ donc $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x)\cos(\frac{\pi}{2}) - \sin(x)\sin(\frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$ car $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.
   De même $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ donc $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \sin(x)\cos(\frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{\pi}{2})\cos(x) = \cos(x)$.

3. $f(x+\frac{\pi}{2}) = \dfrac{\cos(x+\frac{\pi}{2})}{\sin(x+\frac{\pi}{2})} - \dfrac{\sin(x+\frac{\pi}{2})}{\cos(x+\frac{\pi}{2})} = \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)} - \dfrac{\cos(x)}{-\sin(x)} = f(x)$ en utilisant les propriétés précédentes.

Exercice 3 : Problème

1. Soit u définie par $u(x) = x^2 - 1$. u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme et strictement positive sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$. Donc $\sqrt{u}$ est définie, dérivable et non nul sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, donc $\dfrac{1}{\sqrt{u}}$ est définie et dérivable sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

2. (a) $\lim\limits_{x\to 1} x^2 - 1 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$ donc par composition $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x^2-1} = 0$.

   pour $x > 1$, $\sqrt{x^2-1} > 0$ donc par quotient, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$.
   Sur D_f, $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2-1}}$.
   Pour $x \neq 0$, $\dfrac{x^2}{x^2-1} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{x^2}}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^2-1} = 1$.
   $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x} = 1$ donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

   (b) On en déduit qu'il existe deux asymptotes, une horizontale d'équation $y = 1$ et une verticale d'équation $x = 1$.

3. (a) Soit v définie par $v(x) = x$, on a $v'(x) = 1$. $u(x) = x^2 - 1$ donc $u'(x) = 2x$.

   $$f' = \frac{v'\sqrt{u} - v\left(\sqrt{u}\right)'}{v} = \frac{v'\sqrt{u} - v\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}}{v} = \frac{2v'u - vu'}{2\sqrt{u} \times u2}$$

   Donc $f'(x) = \dfrac{2(x^2-1) - 2x^2}{2\sqrt{x^2-1}(x^2-1)} = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}(x^2-1)}$

(b) Sur $]1;+\infty[$, $x^2-1>0$ et $\sqrt{x^2-1}>0$ donc $f'(x)<0$.

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$
f	$+\infty$ ↘	1

(c) f est continue, strictement décroissante et $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x)=2$ admet une unique solution sur $]1;+\infty[$.

4. (a) $f(-x) = \dfrac{-x}{\sqrt{(-x)^2-1}} = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = -f(x)$ donc f est impaire.

(b) Par symétrie centrale, on en déduit que :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f	-1 ↘	$-\infty$ ‖	‖ $+\infty$ ↘	1

5. $f'(2) = \dfrac{-1}{3\times\sqrt{3}}$ donc l'équation de la tangente est du type $y = \dfrac{-1}{3\times\sqrt{3}}x + b$ où b est un réel.

La droite passe par le point $(2;\dfrac{2}{\sqrt{3}})$, on a donc $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{-2}{3\times\sqrt{3}} + b$ ce qui est équivalent à $b = \dfrac{7}{3\sqrt{3}}$.

L'équation réduite est $y = \dfrac{-1}{3\sqrt{3}}x + \dfrac{8}{3\sqrt{3}}$

6. g est dérivable sur D_f car $x^-1>0$ sur cet intervalle.

$g'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

F est définie par $F(x) = g(x) - g(2) = \sqrt{x^2-1} - \sqrt{3}$

Exercice 4 : Problème semi-ouvert

1. $\cos(\theta) = \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{4}{AD}$ donc $AD = \dfrac{4}{\cos(\theta)}$ et $\tan(\theta) = \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{BD}{4}$ donc $BD = 4\tan(\theta)$ donc $CD = CB + BD = 7 + \dfrac{4}{\tan(\theta)}$.

2. Le lapin aura traversé la route avant le passage du camion ssi le lapin arrive à parcourir la longueur AD en moins de temps que le camion parcourt la longueur CD.

Le lapin parcourt la longueur AD en $\dfrac{AD}{30000} = \dfrac{1}{7500\cos(\theta)}$ heure et le camion parcourt la longueur CD en $\dfrac{CD}{60000} = \dfrac{4\tan(\theta)+7}{60000}$ heure.

Donc Le lapin sera sauf ssi $\dfrac{1}{7500\cos(\theta)} < \dfrac{4\tan(\theta)+7}{60000}$, ce qui est équivalent à $\dfrac{4}{\tan(\theta)} - \frac{7}{2} - 2\tan(\theta) < 0$ ce qui est équivalent à $f(\theta)>0$

3. Résolvons $f(\theta)>0$. Pour cela étudions la fonction f.

f est dérivable sur $[0;\frac{\pi}{2}[$ comme somme de fonctions trigonométriques dérivables sur cet intervalle ($\cos(x)\neq 0$ sur $[0;\frac{\pi}{2}[$)

$f'(\theta) = \dfrac{2}{\cos^2(\theta)} - \dfrac{4\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \dfrac{2-4\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)}$.

Sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ $f'(\theta)>0 \Leftrightarrow 2-4\sin(\theta)>0 \Leftrightarrow \sin(\theta)<\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta\in[0;\frac{\pi}{6}]$.

f est croissante sur $[0;\frac{\pi}{6}]$ et décroissante sur $[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}]$.

On sait aussi que f est continue, or $f(0) = -\frac{1}{2}$, $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{7}{2} - \dfrac{6\sqrt{3}}{3} > 0$ et $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} f(\theta) = -\infty$. Par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires $f(\theta)$ a deux solutions (approximativement 0,4 et 0,64).

Le lapin s'en sortira donc si l'angle mesure entre 23 et 37 degrés environ.