Durée 2 heures. Le barème est donné à titre indicatif.
Le manque de soin et de clarté dans la rédaction sera pénalisé.

Exercice 1 : Restitution organisée des connaissances (15 minutes) (3 points)

L'objet de cette question est de démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

On supposera connus les résultats suivants :

- la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée ;
- $\mathrm{e}^0 = 1$;
- pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x > 0$.
- Pour tout x $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$
- Soient deux fonctions φ et ψ définies sur l'intervalle $[A\ ;\ +\infty[$ où A est un réel positif.
  Si pour tout x de $[A\ ;\ +\infty[$, $\psi(x) \leqslant \varphi(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$.

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
2. En déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$

Exercice 2 : Exercices classiques (15 minutes) (4 points)

1. Résoudre $\mathrm{e}^{3x+5} > 1$
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x + x}$
3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$
4. Donner sans justification la dérivée de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$
5. Dresser le tableau de variations de $g : x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ sur $[0; 5]$

Exercice 3 : Problème 1 : Probabilité (45 minutes) (7 points)

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.

On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3.

Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8.

Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.

On choisit au hasard un manchot dans un zoo.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'évènement :

— T_n : « le manchot utilise le toboggan lors de son n-ième passage. »

— P_n : « le manchot utilise le plongeoir lors de son n-ième passage. »

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par : $u_n = p(T_n)$,

où $p(T_n)$ est la probabilité de l'évènement T_n.

1. (a) Donner les valeurs des probabilités $p(T_1)$, $p(P_1)$ et des probabilités conditionnelles $p_{T_1}(T_2)$, $p_{P_1}(T_2)$ puis illustrer le tout à l'aide d'un arbre pondéré.
   (b) Montrer que $p(T_2) = \dfrac{1}{4}$.
   (c) Les événements T_1 et T_2 sont-ils indépendants ?
   (d) Sachant que le manchot a utilisé le tobogan lors du 2ème passage, quelle est la probabilité qu'il ait utilisé le tobogan lors du 1er passage ?
2. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0{,}1u_n + 0{,}2$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par : $v_n = u_n - \dfrac{2}{9}$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$. Préciser son premier terme.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   (c) Calculer la limite de la suite (u_n).

4. L'algorithme ci-dessous permet de déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle $u_n - \frac{2}{9}$ est inférieur à 0,001.

   (a) Compléter les parties manquantes de cet algorithme.

Variables	:	n est un entier naturel
		u est un réel
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0
		Affecter à u la valeur $\frac{5}{18}$
Traitement	:	Tant que ...., faire :
		Affecter à u la valeur ....
		Affecter à n la valeur ....
		Fin Tant que
Sortie	:	Afficher ....

   (b) Expliquer pourquoi cet algorithme s'arrête.

5. Un zoo va ouvrir à Saint-Cloud. Le nouveau propriétaire souhaite installer de nouveaux manchots.
   Il choisit de façon aléatoire dans les zoo du monde 36 manchots. On admettra que ce prélèvement revient à effectuer un tirage avec remise de 36 manchots parmi l'ensemble des manchots de zoo.
   On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de manchots qui utilisent le tobogan lors du second plongeon.

   (a) Justifier que X suit une loi binomiale, dont on précisera les paramètres.

   (b) Déterminer l'espérance et l'écart-type de X.

Exercice 4 : Problème 2 : Fonction exponentielle (45 minutes) (6 points)

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Dresser le tableau de variations de g.
3. (a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0\ ;\ +\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.

   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

   (c) Démontrer que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.
2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0\ ;\ +\infty[$.

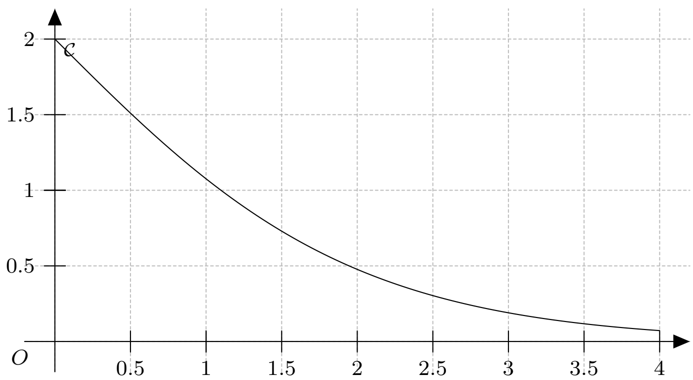
Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{4}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
La figure est donnée ci-contre :
Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M le point de $(\mathcal{C})$ de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$,
P le point de coordonnées $(x\ ;\ 0)$,
Q le point de coordonnées $(0\ ;\ f(x))$.



1. Démontrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α.
   On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 1.
2. Le point M a pour abscisse α.
   La tangente (T) en M à la courbe $(\mathcal{C})$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?
   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.