Exercice 1 : Restitution organisée des connaissances

Voir le cours

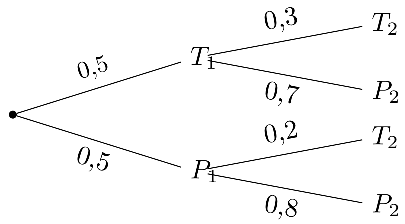
Exercice 2 : Exercices classiques

1. $e^{3x+5} > 1 \Leftrightarrow 3x+5 > 0$(car exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$). $S =]-\frac{5}{3};+\infty[$.
2. $\dfrac{e^x+1}{e^x+x} = \dfrac{1+e^{-x}}{1+xe^{-x}}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^{-x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+xe^{-x}) = 1$. Par quotient, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+1}{e^x+x} = 1$
3. $\dfrac{e^x}{x^2} = \left(\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{x}\right)^2$. On pose $X = \frac{x}{2}$, on a alors $\dfrac{e^x}{x^2} = \left(\dfrac{e^X}{X}\right)^2 \times \frac{1}{4}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$, par un théorème de comparaison, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$
4. $f'(x) = 2xe^{x^2}$
5. g est dérivable comme produit de fonctions dérivables sur $[0;5]$. On a $g'(x) = e^x - xe^x = (1-x)e^x$. $e^x > 0$ pour $x \in [0;5]$, donc g' est du signe de $1-x$ qui est positif sur $[0;1]$ et négatif sur $[1;+\infty[$.

x	0		1		5
g'		$+$		$-$	
g	0	$\nearrow$	e^1	$\searrow$	$5e^5$

Exercice 3 : Problème 1 : Probabilité 1. (a

Par lecture de l'énoncé $p(T_1) = 0.5$, $p(P_1) = 0.5$, $p_{T_1}(T_2) = 0{,}3$ et $p_{P_1}(T_2) = 1 - p_{P_1}(P_2) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, on a donc



(b) T_1 et P_1 forment un système complet d'événements.

Par la formule des probabilités totales : $p(T_2) = p(T_1) \times p_{T_1}(T_2) + p(P_1) \times p_{P_1}(T_2) = \dfrac{1}{4}$.

(c) $p(T_2) \times p(T_1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.
$p(T_2 \cap T_1) = 0{,}2 \times 0{,}5 = \frac{1}{10}$. Les événements ne sont donc pas indépendants.

(d) $p_{T_2}(T_1) = \dfrac{p(T_1 \cap T_2)}{p(T_2)} = \dfrac{0{,}3 \times 0{,}5}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{5}$

La probabilité qu'il ait utilisé le tobogan lors du 1er passage sachant qu'il est utilisé le tobogan lors du 2ème passage est $\frac{3}{5}$.

2. T_n et P_n forment un système complet d'événements.
Par la formule des probabilités totales, $u_{n+1} = p(T_{n+1}) = p(T_n) \times p_{T_n}(T_{n+1}) + p(P_n) \times p_{P_n} T_{n+1} = u_n \times 0{,}3 + (1-u_n) \times 0{,}2 = 0{,}1u_n + 0{,}2$
3. (a) $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{9} = 0{,}1u_n + 0{,}2 - \frac{2}{9} = 0{,}1(v_n + \frac{2}{9}) + 0{,}2 - \frac{2}{9} = 0{,}1v_n + \frac{2}{90} + \frac{18}{20} - \frac{20}{90} = v_n$.
(v_n) est donc une suite géométrique de premier terme $u_0 - \frac{2}{9} = \frac{1}{2} - \frac{2}{9} = \frac{5}{18}$ et de raison 0,1.
(b) On a donc $v_n = \frac{5}{18} \times (0{,}1)^{n-1}$ et $u_n = \frac{5}{18} \times (0{,}1)^{n-1} + \frac{2}{9}$.
(c) $0 < 0{,}1 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}1^{n-1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{9}$
4. (a)

Variables	:	n est un entier naturel
		a est un réel
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0
		Affecter à u la valeur 800
Traitement	:	Tant que $2/9 - u < 0{,}001$, faire :
		Affecter à u la valeur 0,1u+0,2
		Affecter à n la valeur n+1
		Fin Tant que
Sortie	:	Afficher n

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{9}$, il existera donc un réel N tel que pour tout entier $n \geqslant N$, $\frac{2}{9} - u_n > 0{,}001$.

5. (a) Choisir un manchot est une épreuve de Bernoulli de succés ≪ Le manchot fera du tobogan lors de son deuxième plongeon ≫ de paramètre $\frac{1}{4}$.

On observe la répétition de 36 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès après ces 36 épreuves. X suit donc la loi binomiale de paramètres 36 et $\frac{1}{4}$

(b) $E(X) = \frac{1}{4} \times 36 = 9$ et $\sigma(X) = \sqrt{36 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{\sqrt{27}}{2}$

Exercice 4 : Problème 2 : Fonction exponentielle

Partie 1

1. $g(x) = \mathrm{e}^x(1-x)+1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty}(1-x) = -\infty$, par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x(1-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.
2. $g'(x) = \mathrm{e}^x - e^x - x\mathrm{e}^x = -x\mathrm{e}^x$. x et e^x sont positifs sur $[0;+\infty]$.

x	0		$+\infty$
g'		$-$	
g	2	$\searrow$	$-\infty$

3. (a) On siat que :
   — g est continue sur $[0;+\infty[$;
   — g est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$;
   — $g(0) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ et $0 \in]-\infty;2]$.
   Par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0;+\infty[$

   (b) À la calculatrice, on a $1{,}27 < \alpha < 1{,}28$.

   (c) $\mathrm{e}^\alpha - \alpha\mathrm{e}^\alpha + 1 = 0$ c'est-à-dire $\mathrm{e}^\alpha(1-\alpha)+1 = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{e}^\alpha = -\dfrac{1}{1-\alpha}$.
4. g strictement décroissante donc g est positive si $x < \alpha$ et sinon elle est négative.

Partie 2

1. Soient u et v définies par $u(x) = 4x$ et $v(x) = \mathrm{e}^x + 1$, on a donc $u'(x) = 4$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$, donc :
$$A'(x) = \frac{4(\mathrm{e}^x+1) - 4x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \frac{4g(x)}{(\mathrm{e}^x+1)^2}.$$
Pour tout réel x, $(\mathrm{e}^x+1)^2 > 0$ car $\mathrm{e}^x > 0$.
2. On en déduit que A est strictement croissante sur $[0;\alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha;+\infty[$

Partie 3

1. L'aire du rectangle est $xf(x) = A(x)$. Selon le 2) de la partie 2, le maximum de A est atteint en α. Donc l'aire atteint son maximum en α.
2. Le coefficient directeur de la droite (PQ) est égal à $-\dfrac{f(\alpha)}{\alpha} = -\dfrac{\frac{4}{\mathrm{e}^\alpha+1}}{\alpha} = -\dfrac{4}{\alpha\left(\mathrm{e}^\alpha+1\right)}$.
Or on a vu que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha-1}$, donc le coefficient directeur est égal à :
$$-\frac{4}{\alpha\left(\mathrm{e}^\alpha+1\right)} = -\frac{4}{\alpha\left(\frac{1}{\alpha-1}+1\right)} = -\frac{4(\alpha-1)}{\alpha(1+\alpha-1)} = -\frac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}.$$
La tangente en $M(\alpha\ ;\ f(\alpha))$ a pour coefficient directeur $f'(\alpha)$.
Or $f'(x) = -\dfrac{4\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$, donc
$$f'(\alpha) = -\frac{4\mathrm{e}^\alpha}{(\mathrm{e}^\alpha+1)^2} = -\frac{\frac{4}{\alpha-1}}{\left(\frac{1}{\alpha-1}+1\right)^2} = -\frac{4(\alpha-1)}{(1+\alpha-1)^2} = -\frac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}.$$
Les coefficients directeurs sont égaux : les droites sont parallèles.