Durée 2 heures. Le barème est donné à titre indicatif.
Le manque de soin et de clarté dans la rédaction sera pénalisé.

Exercice 1 : Une section (1 heure) (9 points)

On considère le cube $ABCDEFGH$ et les points M, N et P définis par :

1. M milieu de $[BC]$.
2. $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$.
3. $\overrightarrow{EP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EH}$

Partie A : Sans coordonnées

1. Justifier que les droites (MN) et (AD) sont sécantes en un point appelé L. Construire ce point.
2. Construire en justifiant l'intersection K du plan (MNP) et de la droite $[DH]$.
3. On appelle d la droite d'intersection des plans (MNP) et (EFG). Tracer cette droite en justifiant.
4. Tracer (en rouge) sans justifier la section du plan (MNP) avec le cube.

Partie B : Avec coordonnées

On considère le repère orthonormal $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

1. Donner, sans justification, les coordonnées des points A, B, D et E, puis déterminer, avec justification, les coordonnées des points C, M, N et P.
2. Soit $L(0; \frac{5}{4}; 0)$. Montrer que M, N et L sont alignés. En déduire que L est l'intersection de (MN) et (AD).
   (a) Montrer que d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.
   (b) Ces droites sont coplanaires, déterminer les coordonnées de l'intersection de ces droites.
   (c) Reconnaître ces droites (le montrer). Que peut-on en déduire pour cette intersection ?
4. Soit $Q(\frac{1}{3}; 0; 1)$
   (a) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ parallèle à (MN) et passant par P.
   (b) Montrer que $Q \in \Delta$.
   (c) Montrer que Q, E et F sont alignés.
   (d) Que peut-on en déduire pour Q ?
5. Soit $R(1; 0; \frac{1}{2})$.
   (a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{NR}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont coplanaires.
   (b) Donner une représentation paramétrique du plan (MCG).
   (c) En déduire que R est dans ce plan (on utilisera la représentation paramétrique).
   (d) Que peut-on en déduire pour R ?

Exercice 2 : Nombres complexes (40 minutes) (7 points)

Partie A : ROC

Prérequis : On suppose connu le résultat suivant :

Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z', $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')$ à 2π près.

1. Démontrer que pour tout nombre complexe non nul z, on a $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)$ à 2π près.
2. En déduire que, quels que soient les nombres complexes non nuls z et z', on a : $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ à 2π près.

Partie B : Transformation

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = 1 - \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{B}} = 2 + \sqrt{3} + \mathrm{i}.$$

1. Déterminer le module et un argument de z_{A}.
2. (a) Écrire $\dfrac{z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{A}}}$ sous forme algébrique.
   (b) Montrer que $\dfrac{z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{A}}} = \left(1 + \sqrt{3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   (c) En déduire la forme exponentielle de z_{B}.
3. À tout point M du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}\,\bar{z}$. On désigne par (E) l'ensemble des points M du plan tels que $M' = M$.
   (a) Montrer que les points O et B appartiennent à l'ensemble (E).
   (b) Soit M un point distinct du point O.
   Son affixe z est égale à $\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où ρ est un réel strictement positif et θ un nombre réel.
   Montrer que l'affixe z' du point M' est égale à $\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)}$ puis déterminer l'ensemble des valeurs du réel θ telles que M appartienne à l'ensemble (E).
   (c) Déterminer l'ensemble (E).

Exercice 3 : Prendre des initiatives (15 minutes) (4 points)

Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.