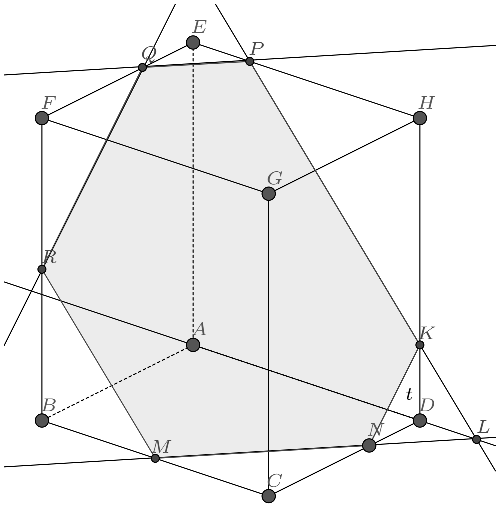
Exercice 1 :



Partie A : Sans coordonnées

1. $M \in (BC)$ et $N \in (CD)$ donc (MN) est inclut dans (ADC). (MN) et (AD) sont donc coplanaires. $M \in (BC)$ et $(AD)//(BC)$ donc (MN) n'est pas parallèle à (AD) et donc (AD) et (MN) sont sécante.
2. K est l'intersection des droites (PD) et (AD).
3. (ABC) et (EFG) sont parallèles. (MNP) intersecte (ABC) en (MN). Par la propriété d'incidence, (MNP) intersecte (EFG) en une droite parallèle à (MN). De plus cette droite passe par P, il faut donc tracer la droite parallèle à (MN) et qui passe par P.
4. On appèle Q l'intersection de d avec (EF). On trace la parallèle d_3 à la droite (PK) qui passe par M, on appelle R l'intersection de (FB) et d_3.

Partie B : Avec coordonnées

1. $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $M(1;\frac{1}{2};0)$, $N(\frac{1}{3};1;0)$, $P(0;\frac{1}{4};1)$ et $L(0;\frac{5}{4};0)$
2. $\overrightarrow{MN}\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{2};0\right)$ et $\overrightarrow{ML}\left(-1;\frac{3}{4};0\right)$. On a donc $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{ML}$.
3. (a) Un vecteur directeur de d_1 est $\vec{u}(0;1;-1)$, un vecteur directeur de d_2 est $\vec{v}(0;0;1)$. Les coordonnées ne sont pas proportionnelles, les vecteurs directeurs ne sont donc pas colinéaires, les droites ne sont donc pas parallèles.

   (b) Résolvons $\begin{cases} 0=0 \\ \frac{1}{4}+t=1 \\ 1-t=1+t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ t=\frac{3}{4} \\ t'=-\frac{3}{4} \end{cases}$ l'intersection des droites est $K(0;1;\frac{1}{4})$.

   (c) $d_1 = (PL)$. En effet avec $t=0$, on remarque que d_1 passe par P et avec $t=1$, on remarque que d_1 passe par L. $d_2 = (HD)$. En effet avec $t=0$, on remarque que d_2 passe par H et avec $t=1$, on remarque que d_2 passe par D.
   On a donc calculer les coordonnées de K, l'intersection des droites (HD) et (PL).
4. (a) Δ est parallèle à (MN), elle admet donc comme vecteur directeur $\overrightarrow{MN}\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{2};0\right)$.
   Soit $T(x;y;z)$, un point de l'espace

   $$T \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{TP} = t\overrightarrow{MN},\ \text{avec } t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{2}{3}t \\ y=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}t \\ z=1 \end{cases},t \in \mathbb{R}.$$

   (b) Résolvons $\begin{cases} \frac{1}{3}=-\frac{2}{3}t \\ 0=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}t \\ 1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-\frac{1}{2} \\ t=-\frac{1}{2} \\ 1=1 \end{cases}$, Donc $Q \in \Delta$ avec $t=-\frac{1}{2}$.

   (c) On remarque que $\overrightarrow{EQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$ donc E, Q et F sont alignés.

   (d) Q est l'intersection de l'arrête $[EF]$ et du plan (MNP). Donc Q est un des sommets de la section.
5. (a) $\overrightarrow{MP}\left(-1;-\frac{1}{4};1\right)$, $\overrightarrow{NR}\left(\frac{2}{3};-1;\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{PR}\left(1;-\frac{1}{4};-\frac{1}{2}\right)$.
   Résolvons :

   $$\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{NR} + y\overrightarrow{PR} \Leftrightarrow \begin{cases} -1=\frac{2}{3}x+y \\ -\frac{1}{4}=-x-\frac{1}{4}y \\ 1=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{2}{3}x-1 \\ -\frac{1}{4}=-x+\frac{1}{4}(\frac{2}{3}x+1) \\ 1=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(\frac{2}{3}x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{7}{5} \\ x=\frac{3}{5} \\ x=\frac{3}{5} \end{cases}.$$

   On a donc $\overrightarrow{MP} = \frac{7}{5}\overrightarrow{NR} + \frac{3}{5}\overrightarrow{PR}$.

   (b) On remarque d'abord que $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MG}$ ne sont pas colinéaires, les vecteurs dirigent donc un plan.
   Soit $T(x;y;z)$ un point du plan,

   $$T \in (MCG) \Leftrightarrow \overrightarrow{MT} = t\overrightarrow{MC} + t'\overrightarrow{MG},\ t,t' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+\frac{2}{3}t+t' \\ y=\frac{1}{2}-t-\frac{1}{4}t' \\ z=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}t' \end{cases}$$

   (c) Résolvons $\begin{cases} 1=1+\frac{2}{3}t+t' \\ 0=\frac{1}{2}-t-\frac{1}{4}t' \\ \frac{1}{2}=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{3}{5} \\ t'=-\frac{2}{5} \\ t'=-\frac{2}{5} \end{cases}.$
   R est donc bien dans le plan.

   (d) On n'en déduit que R est un autre sommet de la section (voir la figure).

Exercice 2 :

Partie A : ROC

1. Soit z un complexe non nul : $0=\arg\left(\frac{z}{z}\right)=\arg(z)+\arg\left(\frac{1}{z}\right)$, c'est-à-dire $\arg\left(\frac{1}{z}\right)=-\arg(z)$
2. $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=\arg(z)+\arg\left(\frac{1}{z}\right)=\arg(z)-\arg(z')$.

Partie B : Transformation

1. $|z_A|=\sqrt{2}$, $z_A=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$. Un argument est donc $-\frac{\pi}{4}$.
2. (a) $\dfrac{z_\mathrm{B}}{z_\mathrm{A}}=\dfrac{2+\sqrt{3}+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{\left(2+\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\dfrac{2+\sqrt{3}-1+\mathrm{i}\left(2+\sqrt{3}+1\right)}{1+1}$
   $\dfrac{1+\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(3+\sqrt{3}\right)}{2}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$.

   (b) $\left(1+\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}=\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}+3}{2}\right)=\dfrac{z_B}{z_A}$.

   (c) $z_B=\left(1+\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}z_A=\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}}$.
3. (a) $z'_O=0=z_O$ et $z'_B=\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{12}}=\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}}=z_B$. Les points O et B sont bien invariants.

   (b) Si $z=\rho\mathrm{e}^{i\theta}$, alors $z'=\rho\mathrm{e}^{-i\theta}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}=\rho\mathrm{e}^{\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}$.

   $$z'=z\Leftrightarrow\rho\mathrm{e}^{i\theta}=\rho\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{6}-\theta+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

   (c) (E) est la demi droite partant de O et passant par B. Pour la tracer, il faut représenter le point D d'affixe $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$ puis faire la bissectrice de l'angle $\left(\vec{u};\overrightarrow{OD}\right)$.

Exercice 3 :

Avec la calculatrice, on conjecture que la suite converge vers 1,62. On remarque aussi qu'elle semble croissante. Montrons par récurrence qu'elle est croissante et qu'elle est majorée par 1,62.
Pour tout entier n , on définit P(n) : « $0<u_n<u_{n+1}<1{,}62$ »

Initialisation Pour $n=0$, $u_1=\sqrt(2)<1{,}62$ et $u_1\sqrt(2)>1=u_0>0$. L'hypothèse est donc vérifiée.

Hérédité Soit n un entier, supposons que $P(n)$ est vraie, montrons $P(n+1)$.
$P(n+1)$ s'écrit : « $0<u_{n+1}<u_{n+2}<1{,}62$.
On a $0<u_n<u_{n+1}<1{,}62$ donc $1<u_n+1<u_{n+1}+1<2{,}62$ donc par croissance de la fonction racine carrée sur $[0;+\infty[$ $1<\sqrt{u_n+1}<\sqrt{u_{n+1}+1}<\sqrt{2{,}62}$.
On remarque que $\sqrt{2{,}62}\approx 1{,}618$, on donc bien $0<u_{n+1}<u_{n+2}<1{,}62$.
$P(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion on a l'initialisation et l'hérédité, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier n.

La suite est croissante et majorée, par le théorème de convergence monotone, on en déduit que (u_n) est convergente. Soit ℓ sa limite.
On a $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{1+u_n}=\sqrt{1+\ell}$ par continuité de la fonction racine carrée sur $[0;+\infty[$.

ℓ est donc solution de $\ell=\sqrt{1+\ell}$ ou encore la solution positive de $\ell^2=1+\ell$. En calculant le discriminant puis appliquant la formule, on trouve deux solutions $\ell_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\ell_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Seul ℓ_1 est positif, on en conclut donc que (u_n) converge vers $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (on remarque que $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}62$)